

ISSN 2222-940X



NAXÇIVAN DÖVLƏT UNIVERSİTETİ

ELMİ ƏSƏRLƏR

*FİZİKA-RİYAZİYYAT VƏ TEXNİKA
ELMLƏRİ SERİYASI*

SCIENTIFIC WORKS

*SERIES OF PHYSICAL, MATHEMATICAL
AND TECHNICAL SCIENCES*

НАУЧНЫЕ ТРУДЫ

*СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК*

NAXÇIVAN, NDU, "QEYRƏT" - 2017

№ 4 (85)

RİYAZİYYAT

SAHİB ƏLİYEV

sahibali60@yahoo.com

ELŞAD AĞAYEV

ağayev.elshad@gmail.com

Naxçıvan Dövlət Universiteti

UOT: 519.6

ÇƏKİ FUNKSİYASINA NƏZƏRƏN ORTONORMAL ÇOXHƏDLİLƏR SİSTEMİNİN MÖVCUDLUQ VƏ YEGANƏLİK ŞƏRTİ

Açar sözlər: *ortoqonal, ortonormal, çəki funksiyası, Teylor sırası, integral, çoxhədli*

Key words: *orthogonal, ortonormal, weightfunction, Taylorseries, integral, polynomial*

Ключевые слова: *ортогональная, ортонормальная, весовая функция, ряд Тейлора, интеграл, многочлен*

Riyazi analizdə sıralar nəzəriyyəsi, xassələri və sonrakı tədqiqatı geniş şəkildə verilmişdir. Məlumdur ki, ortoqonal və ortonormal funksiyalar sistemi, bu sistemə nəzərən Furye sıraları təyin olunmuş, bu sıraların zəruri və kafi şərtləri müəyyənləşmişdir [1].

Xüsusi halda çəki funksiyası, bu funksiyaya nəzərən ortoqonal və ortonormal çoxhədlilər sistemi qurulmuş, onların çəbri və asimtotik xassələri isbat edilmiş, uyğun Furye sıraları tədqiq edilmişdir [2].

Məqalə çəki funksiyasına nəzərən ortnormala çoxhədlilər sisteminin mövcudluq və yeganəlik şərtinə baxacağıq. Xüsusi halda Cebişev- Ermit çoxhədlilərinin bir sıra ilk Rodriq düsturunu quracağıq [2].

Mövcudluq və yeganəlik şərtini verməmişdən qabaq aşağıdakı köməkçi təklifi isbat edək:

L e m m a 1. Tutaq ki, $F_0(x), F_1(x), \dots, F_n(x)$ (1) çoxhədlilər sistemi verilmişdir. Hər bir $F_k(x)$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$) çoxhədlisi k dərəcəli olsun. Onda n dərəcəli ixtiyari $Q_n(x)$ çoxhədlisini yeganə qayda ilə aşağıdakı kimi göstərmək olar.

$Q_n(x) = a_0 F_0(x) + a_1 F_1(x) + \dots + a_n F_n(x)$ və ya

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i F_i(x) \quad (2)$$

İsbatı: Aşağıdakı kimi işarələmələr qəbul edək.

$$F_k(x) = \sum_{i=0}^k c_i^{(k)} x^i \quad (c_k^{(k)} \neq 0)$$

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i \quad (c_n \neq 0)$$

(2)-da nəzərə alsaq və qeyri müəyyən əmsallar üsulundan istifadə etsək aşağıdakı kimi tənliklər sistemini almış olarıq.

$$\begin{cases} a_n c_n^{(n)} = c_n \\ a_n c_{n-1}^{(n)} + a_{n-1} c_{n-1}^{(n-1)} = c_{n-1} \\ a_n c_{n-2}^{(n)} + a_{n-1} c_{n-2}^{(n-1)} + a_{n-2} c_{n-2}^{(n-2)} = c_{n-2} \\ \dots \\ a_n c_1^{(n)} + a_{n-1} c_1^{(n-1)} + \dots + a_1 c_1^{(1)} = c_1 \\ a_n c_0^{(n)} + a_{n-1} c_0^{(n-1)} + \dots + a_0 c_0^{(0)} = c_0 \end{cases}$$

Bu sistemin baş determinantı diaqonal elementlərinin hasilinə bərabər olduğundan 0-dan fəqlidir ($c_k^{(k)} \neq 0$). Deməli $\{a_k\}$ əmsallarını bu sistemdən birqiymətli təyin etmək olar. Bu isə lemmanın isbatı deməkdir.

İndi isə ikinci sualda qoyulmuş əsas problemin həllinə baxaq.

T e o r e m : İxtiyari $h(x)$ çəki funksiyası üçün yüksəkdərəcəli hədd əmsalı müsbət olan və [2] ortonormallıq şərtini ödəyən yeganə $\{p_n(x)\}$ çoxhədlilər ardıcılığı mövcuddur.

İsbatı: $P_n(x)$ çoxhədlisinin yüksəkdərəcəli hədd əmsalını μ_n işarə edək və teoremi riyazi induksiya metodu ilə isbat edək. $n = 0$ olsun. Şərtə görə $p_0(x) = \mu_0 > 0$. Onda ortonormallıq şərtinə

$$\text{görə } \mu_0^2 = \frac{1}{\int_a^b h(x) dx} \quad \mu_0 > 0 \text{ olduğundan } \mu_0 = \frac{1}{\sqrt{\int_a^b h(x) dx}} \quad \text{Yəni,}$$

$$\mu_0 = p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\int_a^b h(x) dx}}$$

Bu halda $p_0(x)$ çoxhədlisi müəyyənləşir. Tutaq ki, $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_{n-1}(x)$ (3) çoxhədlilərini yuxarıdakı qayda ilə təyin etmişik. (3) sisteminin hər bir $p_k(x)$ çoxhədlisi k dərəcəlidir. Əgər (3) sisteminə x^n çoxhədlisini əlavə etsək $p_n(x)$ çoxhədlisi hələlik məlum olmayan çoxhədli olacaq. Bu çoxhədli müəyyənləşdirək.

Lemmaya görə $p_n(x)$ çoxhədlisini aşağıdakı kimi yeganə qaydada göstərmək olar.

$$P_n(x) = \mu_n x^n + c_0^{(n)} p_0(x) + c_1^{(n)} p_1(x) + \dots + c_{n-1}^{(n)} p_{n-1}(x) \quad \text{və ya (4)}$$

$$p_n(x) = \mu_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k^{(n)} p_k(x)$$

(4) – də μ_n və $c_k^{(n)}$ əmsallarını elə seçmək lazımdır ki, alınan çoxhədlilər ortoqonallıq şərtlərini ödəsin. Bu şərtləri (3) sisteminin çoxhədliləri üçün, yəni $m < n$ şərtini ödəyən çoxhədlilər üçün ödənildiyini qəbul etmişik. Onda,

$$\begin{aligned} \int_a^b h(x) p_n(x) p_m(x) dx &= \int_a^b h(x) [\mu_n x^n + c_0^{(n)} p_0(x) + c_1^{(n)} p_1(x) + \dots + c_{n-1}^{(n)} p_{n-1}(x)] p_m(x) dx = \\ &= \int_a^b h(x) \mu_n x^n p_m(x) dx + \int_a^b c_0^{(n)} h(x) p_0(x) p_m(x) dx + \int_a^b c_1^{(n)} h(x) p_1(x) p_m(x) dx + \dots + \\ &+ \int_a^b c_m^{(n)} h(x) p_m^2(x) dx + \dots + \int_a^b c_{n-1}^{(n)} h(x) p_{n-1}(x) p_m(x) dx = \mu_n \int_a^b h(x) x^n p_m(x) dx + c_m^{(n)} = 0 \end{aligned}$$

$$b_{nm} = \int_a^b h(x) x^n p_m(x) dx$$

$$\text{işarə etsək, } \mu_n b_{nm} + c_m^{(n)} = 0 \quad c_m^{(n)} = -\mu_n b_{nm} \quad (5)$$

Sonuncunu (4)-də nəzərə alsaq,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \mu_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} (-\mu_n b_{nk}) p_k(x) = \mu_n x^n - \mu_n \sum_{k=0}^{n-1} b_{nk} p_k(x) = \\ &= \mu_n \left[x^n - \sum_{k=0}^{n-1} b_{nk} p_k(x) \right] \end{aligned}$$

Sonuncu çoxhədli n dərəcəli ortoqonal çoxhədli olacaq. μ_n əmsalını müəyyənləşdirək. Bunun üçün [2]-in $n=m$ şərtindən istifadə edək.

$$\int_a^b h(x) P_n^2(x) dx = 1$$

$$\int_a^b h(x) \left[\mu_n^2 (x^n - \sum_{k=0}^{n-1} b_{nk} P_k(x))^2 \right] dx = 1 \quad \mu_n > 0 \text{ olduğunu nəzərə alsaq}$$

$$\mu_n^2 \cdot \int_a^b h(x) \left[x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_a^b h(x) x^n P_k(x) dx \right) P_k(x) \right]^2 dx = 1$$

$$\mu_n^2 = \frac{1}{\int_a^b h(x) \left[x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_a^b h(x) x^n P_k(x) dx \right) P_k(x) \right]^2 dx}$$

$$\mu_n = \frac{1}{\left\{ \int_a^b h(x) \left[x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_a^b h(x) x^n P_k(x) dx \right) P_k(x) \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

Sonuncunu nəzərə almaqla $c_m^{(n)}$ əmsalından müəyyənləşdirmək olar. μ_n və $c_m^{(n)}$ birqiymətli təyin olunmasından $\{P_n(x)\}$ çoxhədlilər ardıcılığının yeganəliyi alınır. Bu isə mövcudluq və yeganəlik teoreminin isbatı deməkdir. Bu teoremdən istifadə edərək Çebişev – Ermit ortonormal çoxhədlilər sisteminin qurulmasını tədqiq edək:

Yuxarıdakı teoremə görə $H_0(x) = C_{00} > 0$ və

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) H_0^2(x) dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} C_{00}^2 dx = 1 \quad C_{00}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1$$

$$\text{Puasson inteqralına görə } C_{00}^2 \sqrt{\pi} = 1 \quad C_{00}^2 = H_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Məlum lemmadan istifadə edərək Çebişev-Ermit çoxhədlisinin $H_1(x)$ həddini aşağıdakı kimi ifadə edək.

$$H_1(x) = C_{01} H_0(x) + C_{11} x$$

Ortoqonallıq və ortonormallıq istifadə edək.

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) H_0(x) H_1(x) dx = 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) H_1^2(x) dx = 1 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(C_{01} \frac{1}{\sqrt{\pi}} + C_{11} x \right) dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \left(C_{01} \frac{1}{\sqrt{\pi}} + C_{11} x \right)^2 dx = 1$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} C_{01} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} C_{11} x e^{-x^2} dx \right] \right] = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \left(C_{01}^2 \frac{1}{\pi} + 2C_{01} \cdot C_{11} x \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} + C_{11}^2 x^2 \right) dx = 1$$

Aşağıdakı qeyri-məxsusi inteqralları hesablayaq.

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} d(x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^{x^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot x e^{-x^2} dx = \quad (\text{hissə-hissə inteqrallama})$$

$$= -\frac{1}{2} x e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (\text{Puasson inteqralı})$$

$$\text{Nəticədə,} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} C_{01} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 0 \\ C_{01}^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} + C_{11}^2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1 \end{cases} \begin{cases} C_{01} = 0 \\ C_{01}^2 + C_{11}^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{01} = 0 \\ C_{11} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} \end{cases} \text{ onda,} \quad H_1(x) = \frac{2x}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}}.$$

Analoji qayda ilə $H_2(x)$, $H_3(x)$ və s. çoxhədlilərinin hədlərini qurmaq olar.

ƏDƏBİYYAT

1. Уваренков И. М. и Маллер М.З. Курс математического анализа. Учеб. Пособие для физ.-мат. Фак.пед.ин-тов., Т. П. М., Просвещение, 1976
2. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены., Изд. 2-е, доп. Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука", М., 1979, 416 стр
3. Фихтенгольц Э. Т. Курс дифференциального и интегрального исчисления., I, II, III, Наука, 1969.

ABSTRACT

Sahib Aliyev, Elshad Agayev

Weight function of the existence and uniqueness of the system compared to conventional orthonormal polynomials

In this article building orthogonal and orthonormal polynomials the system comparison with the weight. Before proved presence and uniqueness the theorem of lemma is used. An arbitrary weight function for high-efficiency limit of the coefficient is positive and orthonormal job where the only polynomials sequence of existence. By the use of this theory Chebishev Ermit orthonormal polynomials system are build.

РЕЗЮМЕ

Сахиб Алиев, Ельшад Агаев

Везависитот существования и единственности системы по сравнению с обычными ортонормированными многочленами

В этой статье построены ортогональные и ортонормированные многочлены системы по сравнению с весом. Доказано наличие и единственности используется теорема леммы. Для всякой функции существует единственная многочленов, имеющих положительный старший коэффициент и удовлетворяющих условию ортонормированности. С помощью этой теории строятся ортонормированные системы многочленов Чебышева Эрмита.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə çapa tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

**ГАБИЛЬ ЯГУБОВ,
ВУГАР САЛМАНОВ,
ВУГАР ЯГУБОВ,
МЕРВЕ ЗЕНГИН**

Нахчыванский Государственный Университет

УДК: 517.2

**РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО
ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА**

Açar sözlər: *Şredinger tənliyi, ölçülən funksiyalar, Koşi məsələləri, adi diferensial tənliklər*

Key words: *Schrodinger equation, measurable functions, Cauchy problems, ordinary differential equations*

Ключевые слова: *уравнения Шредингера, измеримые функции, задачи Коши, обыкновенные дифференциальные уравнения*

В этой работе изучаются вопросы корректности постановки начально-краевых задач для нелинейного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым. Как известно уравнение Шредингера со специальным градиентным слагаемым и начально-краевые задачи для этого уравнения возникают в квантовой механике, ядерной физике, нелинейной оптике и в других областях современной физики и техники [1–3]. Особенно в квантовой механике и нелинейной оптике при изучении движения заряженных частиц в неоднородной среде возникает уравнение Шредингера со специальным градиентным слагаемым и изучение начально-краевых задач для этого уравнения представляет интерес как с теоретической, так и практической точки зрения. Следует отметить, что начально-краевые задачи для линейного и нелинейного уравнений Шредингера в различных постановках ранее подробно изучены в работах [4–12] и др. Однако начально-краевые задачи даже для линейного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым сравнительно мало изучены [13,14]. Следует отметить, что в работах [13,14] изучаются вопросы существования и единственности решения начально-краевых задач для линейного одномерного и двумерного уравнений Шредингера со специальным градиентным слагаемым, когда коэффициенты являются квадратично суммируемыми функциями. Отметим, что начально-краевые задачи для нелинейного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым сравнительно мало исследованы. В этом направлении можно отметить работы [15,16], в которых изучены начально-краевые задачи для нелинейного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым, когда коэффициенты уравнения зависят только от пространственной переменной или временной переменной. Поэтому исследование вопросы корректности постановки начально-краевых задач для нелинейного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым, когда коэффициенты уравнения одновременно зависят от пространственной и временной переменных, представляет научный и практический интерес.

1. Существование и единственность решения первой начально-краевой задачи

В этой работе сперва будем изучить первую начально-краевую задачу для многомерного нелинейного уравнения Шредингера со специальным градиентным с чисто мнимым коэффициентом в нелинейной части, когда коэффициенты уравнения являются измеримыми ограниченными функциями, зависящими от обеих пространственной и временной переменных.

Пусть D -ограниченная выпуклая область двумерного евклидова пространства E_2 , с

границей Γ , которая предполагается достаточно гладкой, $x = (x_1, x_2)$ -произвольная точка области D , $T > 0$ - заданное число, $0 \leq t \leq T$, $\Omega_t = D \times (0, t)$, $\Omega = \Omega_T$, $S = \Gamma \times (0, T)$ - боковая поверхность Ω ; $C^k([0, T], B)$ - банахово пространство функций, k -раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, T]$ со значениями в банаховом пространстве B ; $L_p(D)$ - лебегово пространство функций, суммируемых по модулю со степенью $p \geq 1$; $L_2(0, T; B)$ - банахово пространство функций, определенных и суммируемых по модулю с квадратом на отрезке $[0, T]$ со значениями в банаховом пространстве B ; $L_\infty(0, T; B)$ - банахово пространство измеримых ограниченных на $(0, T)$ функций со значениями в банаховом пространстве B ; Соболевы пространства $W_p^k(0, l)$, $W_p^{k, m}(\Omega)$, $p \geq 1$, $k \geq 0$, $m \geq 0$, определены, например, в работах [17, 18].

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу об определении функции $\psi = \psi(x, t)$ в области Ω из условий:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \Delta \psi + ia_1(x) \nabla \psi - a(x) \psi + v(x, t) \psi + ia_2 |\psi|^2 \psi = f(x, t), (x, t) \in \Omega, \quad (1)$$

$$\psi(x, 0) = \varphi(x), x \in D, \psi|_S = 0, \quad (2)$$

где $i = \sqrt{-1}$; $a_0 > 0, a_2 > 0$, - заданные числа, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ - оператор Лапласа,

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$ - оператор набла, $a(x), v(x, t)$ - измеримые ограниченные функции, удовлетворяющие условиям:

$$0 \leq a(x) \leq \mu_0, \forall x \in D, \mu_0 = const > 0; \quad (3)$$

$$|v(x, t)| \leq b_0, \left| \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right| \leq b_1, \forall (x, t) \in \Omega, b_0, b_1 = const > 0; \quad (4)$$

$a_1(x) = (a_{11}(x), a_{12}(x))$ -заданная вектор функция, компоненты которой удовлетворяют условиям:

$$|a_{1j}(x)| \leq \mu_1, \left| \frac{\partial a_{1j}(x)}{\partial x_k} \right| \leq \mu_2, \forall x \in D, j, k = 1, 2, \mu_1, \mu_2 = const > 0; \quad (5)$$

$\varphi(x), f(x, t)$ - комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi \in \overset{0}{W}_2(D), f \in W_2^{0,1}(\Omega). \quad (6)$$

Ясно, что задача об определении функции $\psi = \psi(x, t)$ из условий (1), (2) является первой начально-краевой задачей для двумерного нелинейного уравнения Шредингера вида (1).

Определение 1. Функцию $\psi = \psi(x, t)$ из пространства $B_0 \equiv C^0([0, T], \overset{0}{W}_2(D)) \cap C^1([0, T], L_2(D))$ будем называть обобщенным решением из B_0 , если она удовлетворяет уравнению (1) для почти всех $x \in D$ и любого $t \in [0, T]$, а начальному и краевому условиям (2) для почти всех $x \in D$ и для почти всех $(\xi, t) \in S$, соответственно.

Теорема 1. Пусть функции $a(x), v(x, t), a_1(x), \varphi(x), f(x, t)$ удовлетворяют условиям (3)-(6). Тогда начально-краевая задача (1), (2) имеет единственное решение из пространства

B_0 и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\psi(\cdot, t)\|_{W_2^0(D)} + \left\| \frac{\partial \psi(\cdot, t)}{\partial t} \right\|_{L_2(D)} \leq c_0 \left(\|\varphi\|_{W_2^0(D)}^2 + \|f\|_{W_2^0(\Omega)} + \|\varphi\|_{W_2^0(D)}^3 \right), \forall t \in [0, T], \quad (7)$$

где $c_0 > 0$ -постоянная не зависит от φ, f и t .

Доказательство. Возьмем какую-либо фундаментальную в $W_2^0(D)$ и ортонормированную в $L_2(D)$ систему функций $u_k = u_k(x), k = 1, 2, \dots$, например, систему собственных функций следующей спектральной задачи:

$$LX(x) = \lambda X(x), x \in D, X|_{\Gamma} = 0 \quad (8)$$

при $\lambda = \lambda_k, k = 1, 2, \dots$, где оператор L определяется формулой:

$$L = -a_0 \Delta + a(x). \quad (9)$$

Можем отметить, что спектральная задача (8) является спектральной задачей для двумерного уравнения эллиптического типа, изученной в работе [17]. Поэтому с помощью результатов этой работы можем утверждать, что спектральная задача (8) имеет нетривиальные решения $X = u_k(x), k = 1, 2, \dots$ при $\lambda = \lambda_k, k = 1, 2, \dots$, образующих спектр

задачи и эти решения образуют базис в пространствах $W_2^0(D), W_2^1(D)$, и справедливы условия ортонормированности в $L_2(D)$ и ортогональности в $W_2^0(D), W_2^1(D)$ в следующем виде:

$$(u_k, u_m)_{L_2(D)} = \int_D u_k(x) u_m(x) dx = \delta_k^m, \quad (10)$$

где δ_k^m символы Кронекера:

$$\delta_k^m = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases} k, m = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Ясно, что функции $u_k(x), k = 1, 2, \dots$ ортогональны и в следующем смысле:

$$\begin{aligned} [u_k, u_m] &= (u_k, u_m)_{W_2^1(D)}^0 = (Lu_k, u_m)_{L_2(D)} = \int_D \left(a_0 \sum_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} + a(x) u_k u_m \right) dx = \\ &= \lambda_k \delta_k^m, \quad k, m = 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\{u_k, u_m\} = (Lu_k, Lu_m)_{L_2(D)} = (u_k, u_m)_{W_2^1(D)}^0 = \lambda_k \delta_k^m, \quad k, m = 1, 2, \dots \quad (13)$$

В силу предположения $a(x) \geq 0$ все собственные значения $\lambda = \lambda_k, k = 1, 2, \dots$ вещественны, положительны и расположены в порядке возрастания:

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots, \lambda_k \rightarrow \infty \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Наряду с этими предположим, что

$$\|u_k\|_{W_2^1(D)}^0 \leq \tilde{d}_k < +\infty, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

где $\tilde{d}_k, k = 1, 2, \dots$ -положительные постоянные.

По методу Галеркина приближенное решение будем искать в виде:

$$\psi^N(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t) u_k(x), \quad (16)$$

где $c_k^N(t) = (\psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(D)}$, $k = 1, 2, \dots, N$ определяется из условий:

$$i \frac{d}{dt} (\psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(D)} - (L\psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(D)} + i(a_1(\cdot) \nabla \psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(D)} + (v(\cdot, t) \psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(D)} +$$

$$+i\left(a_2|\psi^N|^2\psi^N, u_k\right) = f_k(t), k=1,2,\dots,N, t \in [0,T], \quad (17)$$

$$c_k^N(0) = (\psi^N(\cdot,0), u_k)_{L_2(D)} = \varphi_k, k=1,2,\dots,N. \quad (18)$$

Здесь $f_k(t) = (f(\cdot, t), u_k)_{L_2(D)}$, $\varphi_k = (\varphi, u_k)_{L_2(D)}$, $k=1,2,\dots,N$. Система (17) есть не что иное, как система N нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Из предположений (3)-(6) и свойства $u_k(x), k=1,2,\dots$ следует, что второе, третье, четвертое и пятое слагаемых левой части, а также правая часть является непрерывными на каждом множестве $\{t \in [0,T], |c_k^N| \leq const\}$ функциями $t, c_k^N, k=1,2,\dots,N$. Поэтому для существования по крайней мере одного решения задачи Коши (17), (18) на всем отрезке $[0,T]$ достаточно знать, что все ее возможные решения равномерно ограничены на $[0,T]$ (см. [18–20]). Для установления такой ограниченности докажем следующую лемму:

Лемма 1. Для решения системы (17), (18) верна оценка:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N |c_k^N(t)|^2 + \sum_{k=1}^N \left| \frac{dc_k^N(t)}{dt} \right|^2 &\leq \|\psi^N(\cdot, t)\|_{W_2(D)}^2 + \left\| \frac{\partial \psi^N(\cdot, t)}{\partial t} \right\|_{L_2(D)}^2 \leq \\ &\leq c_1 \left(\|\varphi\|_{W_2(D)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2^{0,1}}^6 \right), t \in [0,T], N=1,2,\dots \end{aligned} \quad (19)$$

Доказательство леммы. Умножим каждое k -ое уравнение из (17) на свое $\bar{c}_k^N(t)$, полученные равенства просуммируем по k от 1 до N и проинтегрируем по t от нуля до $t \leq T$. В результате, используя формулу интегрирования по частям и условию $u_k|_{\Gamma} = 0, k=1,2,\dots$, имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \left(i \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \bar{\psi}^N - a_0 |\nabla \psi^N|^2 + ia_1(x) \nabla \psi^N \bar{\psi}^N - a(x) |\psi^N|^2 + v(x,t) |\psi^N|^2 + ia_2 |\psi^N|^4 \right) dx d\tau = \\ = 2i \int_{\Omega_t} \text{Im}(f \bar{\psi}^N) dx d\tau, \forall t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Из этого равенства вычитывая его комплексное сопряжение получим справедливость равенства:

$$\begin{aligned} i \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial t} \bar{\psi}^N + \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} \psi^N \right) dx d\tau + i \int_{\Omega_t} \left(a_1(x) \nabla \psi^N \bar{\psi}^N + a_1(x) \nabla \bar{\psi}^N \psi^N \right) dx d\tau + \\ + 2ia_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^4 dx d\tau = 2i \int_{\Omega_t} \text{Im}(f \bar{\psi}^N) dx d\tau, \forall t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Используя дифференцируемость функций $a_{1j}(x), j=1,2$ последнее равенство можно написать в виде:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} |\psi^N|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{1j}(x) |\psi^N|^2 \right) dx d\tau + 2a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^4 dx d\tau = \\ = \int_{\Omega_t} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial a_{1j}(x)}{\partial x_j} |\psi^N|^2 dx d\tau + 2 \int_{\Omega_t} \text{Im}(f \bar{\psi}^N) dx d\tau, \forall t \in [0,T]. \end{aligned} \quad (20)$$

Ввиду того, что функции $u_k = u_k(x), k=1,2,\dots$ удовлетворяют однородным граничным условиям $u_k|_{\Gamma} = 0, k=1,2,\dots$ из разложения (16) имеем:

$$\psi^N(x,t)|_{\Gamma} = 0, t \in (0,T), N=1,2,\dots \quad (21)$$

С учетом этих условий и условий на коэффициенты уравнения из равенства (20) нетрудно получить справедливость неравенства:

$$\|\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(D)}^2 + 2a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^4 dx d\tau \leq \|\psi^N(\cdot, 0)\|_{L_2(D)}^2 + \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 + (2\mu_2 + 1) \int_0^t \|\psi^N(\cdot, \tau)\|_{L_2(D)}^2 d\tau \quad (22)$$

для $\forall t \in [0, T]$. Используя формулу (16) можем написать следующее соотношение:

$$\|\psi^N(\cdot, 0)\|_{L_2(D)}^2 = \sum_{k=1}^N |c_k^N(0)|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|^2 = \|\varphi\|_{L_2(D)}^2. \quad (23)$$

С помощью этого соотношения из (22) получим справедливость неравенства:

$$\|\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(D)}^2 + 2a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^4 dx d\tau \leq \|\varphi\|_{L_2(D)}^2 + \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 + (2\mu_2 + 1) \int_0^t \|\psi^N(\cdot, \tau)\|_{L_2(D)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T].$$

С помощью этого неравенства и леммы Гронуолла нетрудно получить справедливость оценки:

$$\|\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(D)}^2 + 2a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^4 dx d\tau \leq c_2 \left(\|\varphi\|_{L_2(D)}^2 + \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 \right), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (24)$$

Теперь оценим $\frac{\partial \psi^N}{\partial t}$. С этой целью систему (17) напомним в виде:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} (\psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(D)} - (a_0 \nabla \psi^N(\cdot, t), \nabla u_k)_{L_2(D)} - (a(\cdot) \psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(D)} + \\ + (v(\cdot, t) \psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(D)} + i(a_1(\cdot) \nabla \psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(D)} + \\ + (ia_2 |\psi^N(\cdot, t)|^2 \psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(D)} = f_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (25)$$

Вычислим производную по t обеих частей этой системы и умножим k -ое уравнение полученной системы на свое $\frac{d\bar{c}_k^N(t)}{dt}$, а потом полученные уравнения просуммируем по k от 1 до N . Тогда, полученное равенство проинтегрируя по интервалу $(0, t)$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \left(i \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial t^2} \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} - a_0 \sum_{j=1}^2 \left| \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial t \partial x_j} \right|^2 + i \sum_{j=1}^2 a_{1j}(x) \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x_j \partial t} \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} - a(x) \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 + \right. \\ \left. + v(x, \tau) \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 + \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial t} \psi^N \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} \right) dx d\tau + \\ + ia_2 \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} \left(|\psi^N|^2 \psi^N \right) \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial f(x, \tau)}{\partial t} \frac{\partial \bar{\psi}^N(x, \tau)}{\partial t} dx d\tau, \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

Из этого равенства вычитывая его комплексное сопряжение, имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} a_2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(|\psi^N|^2 \psi^N \right) \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(|\psi^N|^2 \bar{\psi}^N \right) \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right) dx d\tau + \\ + \int_{\Omega_t} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{1j}(x) \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 \right) dx d\tau = - \int_{\Omega_t} \sum_{j=1}^2 a_{1j}(x) \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 dx d\tau + \\ + 2 \int_{\Omega_t} \text{Im} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} \right) dx d\tau - 2 \int_{\Omega_t} \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial t} \text{Im} \left(\psi^N \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} \right) dx d\tau, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (26)$$

Ясно, что имеет место равенство:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(|\psi^N|^2 \psi^N \right) \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(|\psi^N|^2 \bar{\psi}^N \right) \frac{\partial \psi^N}{\partial t} = 4 |\psi^N|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 + 2 \operatorname{Re} \left[(\psi^N)^2 \left(\frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} \right) \right]. \quad (27)$$

С другой стороны используя равенство (16) и условия $u_k|_\Gamma = 0, k = 1, 2, \dots$ можем написать следующее условие:

$$\frac{\partial \psi^N}{\partial t} \Big|_s = 0, N = 1, 2, \dots \quad (28)$$

Используя (27), (28) и неравенство Коши-Буняковского, а также оценку (24), из (26) нетрудно получить справедливость следующего неравенства:

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial \psi^N(\cdot, t)}{\partial t} \right\|_{L_2(D)}^2 + 2a_2 \int_{\Omega} |\psi^N|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 dx d\tau \leq \left\| \frac{\partial \psi^N(\cdot, 0)}{\partial t} \right\|_{L_2(D)}^2 + \\ & + c_3 \left(\|\varphi\|_{L_2(D)}^2 + \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) + (2\mu_2 + b_1 + 1) \int_0^t \left\| \frac{\partial \psi^N(\cdot, \tau)}{\partial t} \right\|_{L_2(D)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (29)$$

Для оценки первого слагаемого правой части этого неравенства используем систему (17) при $t = 0$ и устанавливаем справедливость неравенства:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \psi^N(\cdot, 0)}{\partial t} \right\|_{L_2(D)}^2 & \leq 5 \|L\psi^N(\cdot, 0)\|_{L_2(D)}^2 + 5a_2^2 \|\psi^N(\cdot, 0)\|_{L_6(D)}^6 + 5 \|f(\cdot, 0)\|_{L_2(D)}^2 + \\ & + 20\mu_1^2 \|\nabla \psi^N(\cdot, 0)\|_{L_2(D)}^2 + 5 \|v(\cdot, 0)\|_{L_\infty(D)}^2 \|\psi^N(\cdot, 0)\|_{L_2(D)}^2. \end{aligned} \quad (30)$$

В силу известного неравенства (см. [18], стр. 79]) при $n = 2$ имеем:

$$\|\psi^N(\cdot, t)\|_{L_6(D)} \leq \beta \|\nabla \psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(D)}^{\frac{2}{3}} \|\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(D)}^{\frac{1}{3}}, \quad (31)$$

где $\beta > 0$ - некоторая постоянная. С помощью формулы (16) из этого неравенства имеем:

$$\|\varphi^N\|_{L_6(D)} \leq \beta \|\nabla \varphi^N\|_{L_2(D)}^{\frac{2}{3}} \|\varphi^N\|_{L_2(D)}^{\frac{1}{3}}. \quad (32)$$

Ввиду того, что $f \in W_2^{0,1}(\Omega)$ и $v \in L_\infty(\Omega)$, $\frac{\partial v}{\partial t} \in L_\infty(\Omega)$, нетрудно установить справедливость неравенств:

$$\|f(\cdot, t)\|_{L_2(D)}^2 \leq c_4 \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}, \quad \forall t \in [0, T], \quad (33)$$

$$\|v(\cdot, t)\|_{L_\infty(D)} \leq \tilde{c}_4, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (34)$$

Ясно, что имеет место равенство:

$$L\psi^N(x, 0) = \sum_{k=1}^N c_k^N(0) u_k(x) = \sum_{k=1}^N (L\varphi, u_k)_{L_2(D)} u_k(x).$$

Отсюда получим следующее соотношение:

$$\|L\psi^N(\cdot, 0)\|_{L_2(D)}^2 = \sum_{k=1}^N |(L\varphi, u_k)_{L_2(D)} u_k(x)|^2 \leq \|L\varphi\|_{L_2(D)}^2.$$

Из этого равенство в силу условия $\varphi \in \overset{0}{W}_2(D)$ и условия на коэффициенты уравнения можем установить справедливость оценки:

$$\|L\psi^N(\cdot, 0)\|_{L_2(D)}^2 \leq c_5 \|\varphi\|_{\overset{0}{W}_2(D)}^2. \quad (35)$$

Аналогично можно установить справедливость неравенства:

$$\|\nabla \psi^N(.,0)\|_{L_2(D)}^2 \leq c_6 \|\varphi\|_{W_2(D)}^2. \quad (36)$$

Учитывая неравенства (31)-(36), из (30) получим справедливость оценки:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t} \right\|_{L_2(D)}^2 \leq c_7 \left(\|\varphi\|_{W_2(D)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2(D)}^6 \right). \quad (37)$$

На основе этой оценки из неравенства (29) имеем:

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|_{L_2(D)}^2 + 2a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 dx d\tau \leq \\ & \leq c_8 \left(\|\varphi\|_{L_2(D)}^2 + \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2(D)}^6 \right) + (2\mu_2 + b_1 + 1) \int_0^t \left\| \frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial t} \right\|_{L_2(D)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (38)$$

Отсюда в силу леммы Гронуолла нетрудно установить справедливость оценки:

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|_{L_2(D)}^2 + 2a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 dx d\tau \leq \\ & \leq c_9 \left(\|\varphi\|_{W_2(D)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2(D)}^6 \right), \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (39)$$

Теперь оценим сначала $\nabla \psi^N(x, t)$ в норме $L_2(D)$ для любого $t \in [0, T]$. С этой целью

каждое k -ое уравнения системы (17) на свое $\frac{d\bar{c}_k^N(t)}{dt}$ и все полученные равенства

просуммируем по $k = 1$ до $k = N$. Тогда полученное уравнение интегрируя по интервалу $(0, t)$ имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \left(i \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 - a_0 \nabla \psi^N \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \bar{\psi}^N) + ia_1(x) \nabla \psi^N \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} - a(x) \psi^N \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} + v(x, \tau) \psi^N \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} + \right. \\ & \left. + ia_2 |\psi^N|^2 \psi^N \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} \right) dx d\tau = \int_{\Omega_t} f \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Суммируя это равенство с его комплексным сопряжением и в полученном равенстве применяя неравенство Коши-Буняковского с использованием условий на коэффициенты уравнения и оценок (24), (39) нетрудно установить справедливость неравенства:

$$\begin{aligned} & \|\nabla \psi^N(.,t)\|_{L_2(D)}^2 \leq \|\nabla \psi^N(.,0)\|_{L_2(D)}^2 + \\ & + c_{10} \left(\|\varphi\|_{W_2(D)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2(D)}^6 \right), \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

где $c_{10} > 0$ - постоянная не зависит от N . Отсюда в силу неравенства (36) получим справедливость оценки:

$$\|\nabla \psi^N(.,t)\|_{L_2(D)}^2 \leq c_{11} \left(\|\varphi\|_{W_2(D)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2(D)}^6 \right), \forall t \in [0, T], \quad (40)$$

где $c_{11} > 0$ - постоянная не зависит от N .

Теперь оценим $\psi^N(x, t)$ в норме $W_2^0(D)$. С этой целью каждое k -ое уравнения системы (17) на свое $\lambda_k \bar{c}_k^N(t)$ и все полученные равенства просуммируем по $k = 1$ до $k = N$.

Тогда получим справедливость равенства:

$$\int_D |L\psi^N(x,t)|^2 dx = \int_D \left[i \frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial t} + ia_1(x) \nabla \psi^N(x,t) + v(x,t) \psi^N(x,t) + ia_2 |\psi^N(x,t)|^2 \psi^N(x,t) - f(x,t) \right] L\bar{\psi}^N(x,t) dx, \forall t \in [0, T]. \quad (41)$$

Из этого равенства с помощью неравенства Коши-Буняковского получим следующее неравенство:

$$\|L\psi^N(.,t)\|_{L_2(D)}^2 \leq 5 \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|_{L_2(D)}^2 + 5\mu_2^2 \|\nabla \psi^N(.,t)\|_{L_2(D)}^2 + 5a_2^2 \|\psi^N(.,t)\|_{L_6(D)}^6 + 5\|v(.,t)\|_{L_\infty(D)}^2 \|\psi^N(.,t)\|_{L_2(D)}^2 + 5\|f(.,t)\|_{L_2(D)}^2, \forall t \in [0, T]. \quad (42)$$

С помощью неравенств (31), (33), (34) и оценок (24), (39), (40) из последнего неравенства имеем:

$$\|L\psi^N(.,t)\|_{L_2(D)}^2 \leq c_{12} \left(\|\varphi\|_{W_2(D)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2(D)}^6 \right), \forall t \in [0, T]. \quad (43)$$

Здесь $c_{12} > 0$ - постоянная не зависит от N . Используя формулу для оператора L имеем:

$$\|L\psi^N(.,t)\|_{L_2(D)} = \|-a_0 \Delta \psi^N(.,t) + a(.) \psi^N(.,t)\|_{L_2(D)} \geq a_0 \|\Delta \psi^N(.,t)\|_{L_2(D)} - \mu_0 \|\psi^N(.,t)\|_{L_2(D)}.$$

Отсюда получим неравенство:

$$\|\Delta \psi^N(.,t)\|_{L_2(D)} \leq \frac{1}{a_0} \|L\psi^N(.,t)\|_{L_2(D)} + \frac{\mu_0}{a_0} \|\psi^N(.,t)\|_{L_2(D)}$$

В этом неравенстве учитывая оценки (24) и (43) получим справедливости оценки:

$$\|\Delta \psi^N(.,t)\|_{L_2(D)}^2 \leq c_{13} \left(\|\varphi\|_{W_2(D)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2(D)}^6 \right). \quad (44)$$

Здесь $c_{13} > 0$ - постоянная не зависит от N . Используя известное неравенство (см. [17], стр.124) для выпуклой области D имеем:

$$\|\psi^N(.,t)\|_{W_2(D)}^2 \leq c_{14} \|\Delta \psi^N(.,t)\|, \forall t \in [0, T]. \quad (45)$$

Тогда с помощью этого неравенства из (44) получим справедливость оценки:

$$\|\psi^N(.,t)\|_{W_2(D)}^2 \leq c_{15} \left(\|\varphi\|_{W_2(D)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2(D)}^6 \right), \forall t \in [0, T]. \quad (46)$$

Здесь $c_{15} > 0$ - постоянная не зависит от N . Таким образом, с помощью оценок (39) и (46) получим нам нужную оценку:

$$\|\psi^N(.,t)\|_{W_2(D)}^2 + \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|_{L_2(D)}^2 \leq c_{16} \left(\|\varphi\|_{W_2(D)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2(D)}^6 \right), \forall t \in [0, T], \quad (47)$$

где $c_{16} > 0$ - постоянная не зависит от N . Используя эту оценку и неравенство:

$$\sum_{k=1}^N |c_k^N(t)|^2 + \sum_{k=1}^N \left| \frac{dc_k^N(t)}{dt} \right|^2 \leq \|\psi^N(.,t)\|_{W_2(D)}^2 + \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|_{L_2(D)}^2, \forall t \in [0, T]$$

с обозначением $c_1 = c_{16}$ получим утверждение леммы. Лемма 1 доказана

Теперь продолжим доказательство теоремы. Рассмотрим функции

$l_{N,k}(t) = (\psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(D)}$, $N, k = 1, 2, \dots$. Из оценки (19) и ортонормированности функций $u_k = u_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ следует, что семейство функций $l_{N,k}(t)$, $N, k = 1, 2, \dots$ и их производные $\frac{dl_{N,k}(t)}{dt}$, $N, k = 1, 2, \dots$ равномерно ограничены на отрезке $[0, T]$:

$$|l_{N,k}(t)| \leq c_{17}, \left| \frac{dl_{N,k}(t)}{dt} \right| \leq c_{18}, N, k = 1, 2, \dots \forall t \in [0, T]. \quad (48)$$

Покажем, что при фиксированном k и произвольном $N \geq k$ функции $l_{N,k}(t)$, $N, k = 1, 2, \dots$ равномерно непрерывны на отрезке $[0, T]$. Действительно интегрируя k -ое уравнение из (17) на отрезке $[t, t + \Delta t]$, имеем:

$$\begin{aligned} |l_{N,k}(t + \Delta t) - l_{N,k}(t)| &\leq \int_t^{t+\Delta t} \left| \int_D a_0 \Delta \psi^N(x, \tau) u_k(x) dx \right| d\tau + \\ &+ \int_t^{t+\Delta t} \left| \int_D i a_1(x) \nabla \psi^N(x, \tau) u_k(x) dx \right| d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \left| \int_D a(x) \psi^N(x, \tau) u_k(x) dx \right| d\tau + \\ &+ \int_t^{t+\Delta t} \left| \int_D v(x, \tau) \psi^N(x, \tau) u_k(x) dx \right| d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \left| \int_D i a_2 |\psi^N(x, \tau)|^2 \psi^N(x, \tau) u_k(x) dx \right| d\tau + \\ &+ \int_t^{t+\Delta t} \left| \int_D f(x, \tau) u_k(x) dx \right| d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью неравенства Коши-Буняковского нетрудно получить справедливость неравенства:

$$\begin{aligned} |l_{N,k}(t + \Delta t) - l_{N,k}(t)| &\leq a_0 \int_t^{t+\Delta t} \|\Delta \psi^N(\cdot, \tau)\|_{L_2(D)} \|u_k\|_{L_2(D)} d\tau + \\ &+ \sqrt{2} \mu_1 \int_t^{t+\Delta t} \|\nabla \psi^N(\cdot, \tau)\|_{L_2(D)} \|u_k\|_{L_2(D)} d\tau + (\mu_0 + b_0) \int_t^{t+\Delta t} \|\psi^N(\cdot, \tau)\|_{L_2(D)} \|u_k\|_{L_2(D)} d\tau + \\ &+ a_2 \int_t^{t+\Delta t} \|\psi^N(\cdot, \tau)\|_{L_6(D)}^3 \|u_k\|_{L_2(D)} d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \|f(\cdot, \tau)\|_{L_2(D)} \|u_k\|_{L_2(D)} d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда в силу неравенства (31) и оценок (19), (44), а также предположения (15) получим справедливость соотношения:

$$|l_{N,k}(t + \Delta t) - l_{N,k}(t)| \leq c_{19} d_k \Delta t, N, k = 1, 2, \dots, \quad (49)$$

где $c_{19} > 0$ - постоянная не зависит от N, k, t .

Производя интегрирования по частям во втором и третьем слагаемых левой части уравнений (17) и полученные соотношения дифференцируя по t , а также интегрируя на отрезке $[t, t + \Delta t]$, нетрудно получить справедливость неравенства:

$$\begin{aligned} \left| \frac{dl_{N,k}(t + \Delta t)}{dt} - \frac{dl_{N,k}(t)}{dt} \right| &\leq \int_t^{t+\Delta t} \left| \int_D a_0 \frac{\partial \psi^N(x, \tau)}{\partial \tau} \Delta u_k(x) dx \right| d\tau + \\ &+ \int_t^{t+\Delta t} \left| \int_D i \frac{\partial \psi^N(x, \tau)}{\partial \tau} \nabla (a_1(x) u_k(x)) dx \right| d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \left| \int_D a(x) \frac{\partial \psi^N(x, \tau)}{\partial \tau} u_k(x) dx \right| d\tau + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_t^{t+\Delta t} \left| \int_D v(x, \tau) \frac{\partial \psi^N(x, \tau)}{\partial \tau} u_k(x) dx \right| d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \left| \int_D ia_2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left(|\psi^N(x, \tau)|^2 \psi^N(x, \tau) \right) u_k(x) dx \right| d\tau + \\
& + \int_t^{t+\Delta t} \left| \int_D \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial \tau} \psi^N(x, \tau) u_k(x) dx \right| d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \left| \int_D \frac{\partial f(x, \tau)}{\partial \tau} u_k(x) dx \right| d\tau.
\end{aligned}$$

Отсюда с помощью неравенства Коши-Буняковского нетрудно получить справедливость неравенства:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{dl_{N,k}(t+\Delta t)}{dt} - \frac{dl_{N,k}(t)}{dt} \right| \leq a_0 \int_t^{t+\Delta t} \left\| \frac{\partial \psi^N(\cdot, \tau)}{\partial \tau} \right\|_{L_2(D)} d\tau \|\Delta u_k\|_{L_2(D)} + \\
& + b_1 \int_t^{t+\Delta t} \|\psi^N(\cdot, \tau)\|_{L_2(D)} d\tau \|\Delta u_k\|_{L_2(D)} + \sqrt{2}\mu_1 \int_t^{t+\Delta t} \left\| \frac{\partial \psi^N(\cdot, \tau)}{\partial \tau} \right\|_{L_2(D)} d\tau \|\nabla u_k\|_{L_2(D)} + \\
& + (\mu_0 + b_0 + \sqrt{2}\mu_2) \int_t^{t+\Delta t} \left\| \frac{\partial \psi^N(\cdot, \tau)}{\partial \tau} \right\|_{L_2(D)} d\tau \|u_k\|_{L_2(D)} + \\
& + 3a_2 \int_t^{t+\Delta t} \int_D \left| \frac{\partial \psi^N(x, \tau)}{\partial \tau} \right| |\psi^N(x, \tau)|^2 |u_k(x)| dx d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \left\| \frac{\partial f(\cdot, \tau)}{\partial \tau} \right\|_{L_2(D)} d\tau \|u_k\|_{L_2(D)}. \quad (50)
\end{aligned}$$

Теперь оценим четвертое слагаемое правой части этого неравенства. В силу неравенства Коши-Буняковского имеем:

$$\begin{aligned}
& 3a_2 \int_t^{t+\Delta t} \int_D \left| \frac{\partial \psi^N(x, \tau)}{\partial \tau} \right| |\psi^N(x, \tau)|^2 |u_k(x)| dx d\tau \leq \\
& \leq 3a_2 \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_D \left| \frac{\partial \psi^N(x, \tau)}{\partial \tau} \right|^2 |\psi^N(x, \tau)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_D |\psi^N(x, \tau)|^2 |u_k(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} d\tau. \quad (51)
\end{aligned}$$

Если применить неравенство Коши-Буняковского для второго множителя в подинтегральном выражении правой части этого неравенства, то имеем:

$$\left(\int_D |\psi^N(x, \tau)|^2 |u_k(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_D |\psi^N(x, \tau)|^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_D |u_k(x)|^4 dx \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (52)$$

В силу известных неравенств (см. [18], стр. 84 и 88) имеем:

$$\|u_k\|_{L_4(D)} \leq c_{20} \|\nabla u_k\|_{L_2(D)}, \quad (53)$$

$$\|\psi^N(\cdot, \tau)\|_{L_4(D)} \leq c_{21} \|\psi^N(\cdot, \tau)\|_{W_2^1(D)}. \quad (54)$$

Тогда с учетом неравенств (52)-(54) из (51) получим справедливость неравенства:

$$\begin{aligned}
& 3a_2 \int_t^{t+\Delta t} \int_D \left| \frac{\partial \psi^N(x, \tau)}{\partial \tau} \right| |\psi^N(x, \tau)|^2 |u_k(x)| dx d\tau \leq \\
& \leq 3c_{20}c_{21}a_2 \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_D \left| \frac{\partial \psi^N(x, \tau)}{\partial \tau} \right|^2 |\psi^N(x, \tau)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\psi^N(\cdot, \tau)\|_{W_2^1(D)} d\tau \|\nabla u_k\|_{L_2(D)}. \quad (55)
\end{aligned}$$

Если учесть это неравенство в неравенстве (50), то оттуда с помощью оценок (19), (39) и предположения (15) нетрудно установить справедливость соотношения:

$$\left| \frac{dl_{N,k}(t+\Delta t)}{dt} - \frac{dl_{N,k}(t)}{dt} \right| \leq c_{22} d_k (\Delta t)^{\frac{1}{2}}, N, k = 1, 2, \dots, \quad (56)$$

где $c_{22} > 0$ - постоянная не зависит от N, k, t .

Из соотношений (49) и (56) следует, что семейство функций $\{l_{N,k}(t)\}, \left\{ \frac{dl_{N,k}(t)}{dt} \right\}$, $N, k = 1, 2, \dots$ равномерно непрерывны на отрезке $[0, T]$ при фиксированном k и при произвольном $N \geq k$. Тогда обычным диагональным процессом можем выделить подпоследовательность $N_m, m = 1, 2, \dots$ и их по которой функции $l_{N_m, k}(t), m = 1, 2, \dots$ и их производные $\frac{dl_{N_m, k}(t)}{dt}, m = 1, 2, \dots$ сходятся равномерно на отрезке $[0, T]$ к непрерывным функциям $l_k(t), \frac{dl_k(t)}{dt}$, соответственно, для каждого $k = 1, 2, \dots$. Функции $l_k(t), k = 1, 2, \dots$ и их производные определяют функции:

$$\psi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} l_k(t) u_k(x), \quad (57)$$

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{dl_k(t)}{dt} u_k(x). \quad (58)$$

Далее, действуя как и в работах [10, 11], можем установить, что подпоследовательности $\{\psi^{N_m}(x, t)\}, \left\{ \frac{\partial \psi^{N_m}(x, t)}{\partial t} \right\}$ сходятся слабо в $\overset{0}{W}_2(D), L_2(D)$ соответственно к функциям $\psi(x, t), \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}$, определенными формулами (57), (58), равномерно относительно $t \in [0, T]$ и предельная функция $\psi(x, t)$ принадлежит пространству B_0 .

Теперь покажем, что предельная функция $\psi(x, t)$ является решением задачи (1), (2) в смысле определения 1. С этой целью сначала докажем, что эта функция удовлетворяет уравнению (1) для почти всех $x \in D$ и любого $t \in [0, T]$. Поэтому при $N = N_m$ k -ое уравнение из (17) умножим на непрерывную функцию $\bar{\eta}_k(t)$ и полученные уравнения складываем по k от $k = 1$ до $N' \leq N_m$. Тогда получим:

$$\int_D \left(i \frac{\partial \psi^{N_m}(x, t)}{\partial t} - a_0 \Delta \psi^{N_m}(x, t) + i a_1(x) \nabla \psi^{N_m}(x, t) - a(x) \psi^{N_m}(x, t) + \nu(x, t) \psi^{N_m}(x, t) + i a_2 |\psi^{N_m}(x, t)|^2 \psi^{N_m}(x, t) - f(x, t) \right) \bar{\eta}^{N_m}(x, t) dx = 0, \forall t \in [0, T] \quad (59)$$

для любой функции $\bar{\eta}_k^{N'}(x, t) = \sum_{k=1}^{N'} \bar{\eta}_k(t) u_k(x), N' \leq N_m$.

В силу того, что $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$ при $m \rightarrow \infty$ равномерно относительно к функции $\psi = \psi(x, t)$ и пространство $\overset{0}{W}_2(D)$ компактно вложено в $L_2(D)$ (см. [17, 18, 21]), подпоследовательность $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$ при $m \rightarrow \infty$ равномерно относительно $t \in [0, T]$ сильно сходится в $L_2(D)$ к функции $\psi = \psi(x, t)$, то есть

$$\left\| \psi^{N_m}(\cdot, t) - \psi(\cdot, t) \right\|_{L_2(D)} \rightarrow 0 \quad (60)$$

равномерно относительно $t \in [0, T]$ при $m \rightarrow \infty$. Из этого соотношения следует, что из $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$ можно выделить подпоследовательность, которая равномерно относительно $t \in [0, T]$ почти всюду в области D к функции $\psi = \psi(x, t)$. Эту подпоследовательность для простоты снова обозначим через $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$. Тогда можем написать следующее предельное соотношение:

$$\psi^{N_m}(x, t) \rightarrow \psi(x, t) \text{ почти всюду в } D \quad (61)$$

равномерно относительно $t \in [0, T]$ при $m \rightarrow \infty$. Кроме того, в силу равномерной оценки (19) и неравенства (31) при $N = N_m$, а также неравенства

$$\left\| \left| \psi^{N_m}(\cdot, t) \right|^2 \psi(\cdot, t) \right\|_{L_2(D)} \leq \left\| \psi^{N_m}(\cdot, t) \right\|_{L_6(D)}^3$$

из известной леммы (см. [18], стр. 530-531) получим, что $\left\{ \left| \psi^{N_m}(x, t) \right|^2 \psi^{N_m}(x, t) \right\}$ при $m \rightarrow \infty$ равномерно относительно $t \in [0, T]$ сходится слабо в $L_2(D)$ к функции $\left| \psi(x, t) \right|^2 \psi(x, t)$, то есть при $m \rightarrow \infty$

$$\int_D \left| \psi^{N_m}(x, t) \right|^2 \psi^{N_m}(x, t) \bar{\eta}^{N'}(x, t) dx \rightarrow \int_D \left| \psi(x, t) \right|^2 \psi(x, t) \bar{\eta}^{N'}(x, t) dx, \forall t \in [0, T] \quad (62)$$

для любой функции $\bar{\eta}_k^{N'}(x, t) = \sum_{k=1}^{N'} \bar{\eta}_k(t) \mu_k(x)$, $N' \leq N_m$, непрерывной на отрезке $[0, T]$ в норме $L_2(D)$. Используя это предельное соотношение и свойство сходимости подпоследовательности $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$ к функции $\psi(x, t)$, если переходить к пределу при $m \rightarrow \infty$ в интегральном тождестве (59), то получим:

$$\int_D \left(i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} - a_0 \Delta \psi(x, t) + ia_1(x) \nabla \psi(x, t) - a(x) \psi(x, t) + \right. \\ \left. + v(x, t) \psi(x, t) + ia_2 \left| \psi(x, t) \right|^2 \psi(x, t) - f(x, t) \right) \bar{\eta}^{N'}(x, t) dx = 0, \forall t \in [0, T] \quad (63)$$

для любой функции $\bar{\eta}_k^{N'}(x, t) = \sum_{k=1}^{N'} \bar{\eta}_k(t) \mu_k(x)$, $N' \leq N_m$. Ввиду того, что все функции вида

$\bar{\eta}_k^{N'}(x, t) = \sum_{k=1}^{N'} \bar{\eta}_k(t) \mu_k(x)$, как пробные функции плотны в $C^0([0, T], L_2(D))$, непосредственно

из тождества (63) получим, что предельная функция $\psi(x, t)$ для любого $t \in [0, T]$ и для почти всех $x \in D$ удовлетворяет уравнению (1). Выполнение начального и граничного условий (2) для предельной функции $\psi(x, t)$ следует из того, что имеет место предельное соотношение (60) при $t = 0$ и пространство B_0 компактно вложено в $L_2(S)$.

Таким образом, нами доказано, что предельная функция $\psi(x, t)$ является решением начально-краевой задачи (1), (2) и это решение принадлежит пространству B_0 и для этого решения справедлива оценка (7), которая непосредственно следует из оценки (19) после перехода к нижнему пределу по слабо сходящейся подпоследовательности $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$ из B_0 к функции $\psi(x, t)$.

Теперь продолжая доказательство теоремы укажем единственность решения начально-краевой задачи (1), (2). Пусть $\psi(x,t)$ и $\Phi(x,t)$ две любые решения задачи (1), (2). Пусть $w(x,t) = \psi(x,t) - \Phi(x,t)$. Тогда из условий (1), (2) ясно, что $w = w(x,t)$ будет решением следующей начально-краевой задачи:

$$i \frac{\partial w}{\partial t} + a_0 \Delta w + ia_1(x) \nabla w - a(x)w + v(x,t)w + ia_2(|\psi|^2 + |\Phi|^2)w + ia_2 \psi \Phi \bar{w} = 0, (x,t) \in \Omega, \quad (64)$$

$$w(x,0) = 0, x \in D, w|_S = 0, \quad (65)$$

Установим оценку для решения этой задачи. С этой целью умножим уравнение (64) на функцию $\bar{w}(x,t)$ и интегрируем по области Ω_t . Используя граничное условие из (65) и формулу интегрирования по частям в полученном равенстве, имеем:

$$\int_{\Omega_t} \left(i \frac{\partial w}{\partial t} \bar{w} - a_0 |\nabla w|^2 + ia_1(x) \nabla w \bar{w} - a(x) |w|^2 + v(x,t) |w|^2 \right) dx d\tau + \int_{\Omega_t} \left(ia_2(|\psi|^2 + |\Phi|^2) |w|^2 + ia_2 \psi \Phi (\bar{w})^2 \right) dx d\tau = 0, \forall t \in [0, T].$$

Из этого равенства вычтем его комплексное сопряжение. Тогда, используя граничное условие из (65), получим справедливость равенства:

$$\int_{\Omega_t} i \left(\frac{\partial w}{\partial \tau} \bar{w} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} w \right) dx d\tau + i 2a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi|^2 + |\Phi|^2) |w|^2 dx d\tau = -i 2a_2 \int_{\Omega_t} \text{Im} \left[\psi \Phi (\bar{w})^2 \right] dx d\tau - i \int_{\Omega_t} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial a_{1j}(x)}{\partial x_j} |w|^2 dx d\tau.$$

для любого $t \in [0, T]$. Отсюда в силу начального условия из (65) получим справедливость следующего неравенства:

$$\|w(\cdot, t)\|_{L_2(D)}^2 + 2a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi|^2 + |\Phi|^2) |w|^2 dx d\tau \leq 2a_2 \int_{\Omega_t} |\psi| |\Phi| |w|^2 dx d\tau + 2\mu_2 \int_{\Omega_t} |w|^2 dx d\tau$$

для любого $t \in [0, T]$. Из этого неравенства с применением неравенства $2|\psi| |\Phi| \leq |\psi|^2 + |\Phi|^2$ имеем:

$$\|w(\cdot, t)\|_{L_2(D)}^2 + a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi|^2 + |\Phi|^2) |w|^2 dx d\tau \leq 2\mu_2 \int_0^t \|w(\cdot, \tau)\|_{L_2(D)}^2 d\tau$$

для любого $t \in [0, T]$. С помощью леммы Гронуолла получим справедливость соотношения:

$$\|w(\cdot, t)\|_{L_2(D)}^2 = 0, \forall t \in [0, T],$$

которое доказывает соотношение:

$$w(x,t) = 0, \forall x \in D, \forall t \in [0, T].$$

Из этого следует единственность решения начально-краевой задачи (1), (2). Теорема 1 доказана.

2. Существование и единственность решения второй начально-краевой задачи

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу об определении функции $\psi = \psi(x,t)$ в области Ω из условий:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \Delta \psi + ia_1(x) \nabla \psi - a(x)\psi + v(x,t)\psi + ia_2 |\psi|^2 \psi = f(x,t), (x,t) \in \Omega, \quad (66)$$

$$\psi(x,0) = \varphi(x), x \in D, \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \Big|_S = 0, \quad (67)$$

где $i = \sqrt{-1}$; $a_0 > 0, a_2 > 0$, - заданные числа, ν -внешняя нормаль границы Γ ,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ - оператор Лапласа, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$ - оператор набла, $a(x), v(x)$ - измеримые ограниченные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\mu_0 \leq a(x) \leq \mu_1, \quad \forall x \in D, \quad \mu_0, \mu_1 = \text{const} > 0; \quad (68)$$

$$|v(x, t)| \leq b_0, \quad \left| \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right| \leq b_1, \quad \forall (x, t) \in \Omega, \quad b_0, b_1 = \text{const} > 0; \quad (69)$$

$a_1(x) = (a_{11}(x), a_{12}(x))$ - заданная вектор функция, компоненты которой удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} |a_{1j}(x)| \leq \mu_2, \quad \left| \frac{\partial a_{1j}(x)}{\partial x_k} \right| \leq \mu_3, \quad \forall x \in D, \quad j, k = 1, 2, \quad \mu_2, \mu_3 = \text{const} > 0; \\ a_{1j}(x)|_{\Gamma} = 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (70)$$

$\varphi(x), f(x, t)$ - комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi \in W_2^2(D), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad f \in W_2^{0,1}(\Omega). \quad (71)$$

Ясно, что задача об определении функции $\psi = \psi(x, t)$ из условий (66), (67) является второй начально-краевой задачей для двумерного нелинейного уравнения Шредингера вида (66).

Определене 2. Функцию $\psi = \psi(x, t)$ из пространства $B_1 \equiv C^0([0, T], W_2^2(D)) \cap C^1([0, T], L_2(D))$ будем называть обобщенным решением из B_1 , если она удовлетворяет уравнению (66) для почти всех $x \in D$ и любого $t \in [0, T]$, а начальному и краевому условиям (67) для почти всех $x \in D$ и для почти всех $(\xi, t) \in S$, соответственно.

Теорема 2. Пусть функции $a(x), v(x, t), a_1(x), \varphi(x), f(x, t)$ удовлетворяют условиям (68)-(71). Тогда начально-краевая задача (66), (67) имеет единственное решение из пространства B_1 и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\psi(\cdot, t)\|_{W_2^2(D)} + \left\| \frac{\partial \psi(\cdot, t)}{\partial t} \right\|_{L_2(D)} \leq c_{23} (\|\varphi\|_{W_2^2(D)} + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|_{W_2^1(D)}^3), \quad \forall t \in [0, T], \quad (72)$$

где $c_{23} > 0$ - постоянная не зависит от φ, f и t .

Доказательство этой теоремы проводится также методом Галеркина аналогично доказательству теоремы 1. В этом случае в качестве фундаментальной в $W_2^2(D)$ системы функций выбираем ортонормированную в $L_2(D)$ и ортогональную в $W_2^2(D)$ систему функций $u_k = u_k(x), k = 1, 2, \dots$, например, систему собственных функций следующей спектральной задачи:

$$LX(x) = \lambda X(x), \quad x \in D, \quad \frac{\partial X}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (73)$$

при $\lambda = \lambda_k, k = 1, 2, \dots$, где оператор L определяется формулой:

$$L = -a_0 \Delta + a(x).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А.Г., Самойленко Ю.И. Управление квантовомеханическими процессами. Наука, 1984, 256 с.
2. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. Принципы адаптивной оптики. М., Наука, 1985, 366 с.
3. Журавлев В.М. Нелинейные волны в многокомпонентных системах с дисперсией и диффузией, Ульяновск, УлГУ, 2001, 200 с.

4. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантовомеханического потенциала // Докл. АН СССР, 1988, т. 303, № 5, с. 1044-1048
5. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. Оптимальное управление нелинейными квантово-механическими системами // Автоматика и телемехан, 1989, № 12, с. 27-38
6. Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. Об одной задаче идентификации для нелинейного уравнения Шредингера // Дифференц. уравнения, 1997, т. 33, № 12, с. 1691-1698.
7. Yajima K., Zhang G. Smoothing property for Schrodinger equations with potential super quadratic at infinity // Commun. Math. Phys., 2001, 231(3), p. 573-590
8. Baudouin L., Kavian O., Puel J.P. Regularity for a Schrodinger equation with singular potentials and application to bilinear optimal control // J. Differential Equations, 2005, 216, p. 188-222.
9. Искендеров А., Ягубов Г. Оптимальное управление неограниченным потенциалом в многомерном нелинейном нестационарном уравнении Шредингера // Вестник Ленкоранского гос. ун-та. Сер. Естественных наук, 2007, Ленкорань, с. 3-56
10. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. Идентификация квантовых потенциалов, Баку, Чашыюглу, 2012, 548 с.
11. Ибрагимов Н.С. Разрешимость начально-краевых задач для многомерного нелинейного стационарного уравнения квазиоптики с чисто мнимым коэффициентом в нелинейной части // Вестник Бакинск.гос. ун-та. Сер. физ.-матем. наук, 2010, № 3, с.72-84
12. Akbaba G.D. The optimal control problem with the Lions functional for the Schrödinger equation including virtual coefficient gradient. Master's thesis, Kars, 2011, 71 pp. (in Turkish).
13. Yagubov G., Toyoğlu F., Subaşı M. An optimal control problem for two-dimensional Schrödinger equation // Applied Mathematics and Computation, vol. 218, iss.11, 2012, pp.6177-6187
14. Yagub G., Ibrahimov N.S, Zengin M. Solvability of the initial-boundary value problems for the nonlinear Schrödinger equation with a special gradient terms // Abstracts of the XXV International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2015), Skhidnytsia, Ukraine, May 11-15, 2015- pp. 53-54
15. Yildirim Aksoy, Y. Kocak and Y. Ozeroglu On the solvability of initial boundary value problems for nonlinear time dependent Schrodinger equation. Quaestiones Mathematicae, 39 (6), pp. 751-771
16. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М., Наука, 1973, 408 с.

XÜLASƏ

İşdə tənliyin əmsalları məkan və zaman dəyişənlərindən asılı olan, ölçülən məhdud funksiyalar olduqda qeyri-xətti hissədə təmiz xəyali əmsallı xüsusi qradient toplanan ilə ikiölçülü qeyri-xətti Şredinger tənliyi üçün başlanğıc-sərhəd məsələlərinə baxılır. Bu zaman birinci və ikinci başlanğıc-sərhəd məsələsinin sanki hər yerdə həllinin mövcudluğu və yeganəliyi haqda teoremlər isbat olunur. Teoremlərin isbatı Qalerkin üsulu ilə aparılır.

ABSTRACT

At this work explores the initial-boundary value problem for two-dimensional nonlinear Schrödinger equation with a special gradient term with purely imaginary coefficient in the nonlinear part, when the coefficients of the equation are measurable, bounded functions depending on spatial and temporal variables. At the same time we prove the existence and uniqueness of solutions almost everywhere the first and second initial boundary value problem. Theorem proving is carried out using Galerkin method.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə çapa tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

CAVANŞİR QULİYEV
AYSEL ƏLİYEVƏ

Naxçıvan Dövlət Universiteti

UOT: 517.93

TAM ŞƏKİLDƏ QILBARQ-SERRİN TƏNLIYI ÜÇÜN DİRİXLƏ MƏSƏLƏSİNİN VİNƏR MƏNADA ÜMUMİ HƏLLİNİN VARLIĞI

Açar sözlər: *differensial tənliklər, elliptik, klassik həll*

Key words: *differential equations, elliptic, classic solution*

Ключевые: *дифференциальные уравнения, эллиптический, классические решения*

Tutaq ki, DCE_n - n ölçülü Evklid fəzasında məhdud oblastdır. $n \geq 3$ $O \geq D$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Həmçinin D hamar və ya hissə - hissə hamar ∂D sərhədinə malik, rəbitəli oblastdır.

Bu oblastda tam şəkilli Qilbarq-Serrin tənliyi üçün birinci sərhəd məsələsi - Dirixlə məsələsi aşağıdakı kimi qoyulur.

$$Lu = f, x \in D, U|_{\partial D} = \varphi, \quad (1)$$

Burada L operatoru aşağıdakı kimi təyin olunur.

$$L = \Delta + \mu(r) \sum_{i=1}^n \frac{x_i x_j}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x) \cdot u(x)$$

Bu operator tam şəkilli Qilbarq-Serrin operatoru adlanır. Tənliyə və operatora daxil olan funksiyalar üçün aşağıdakı şərtlər verilir.

$f(x) \in C^\alpha(D)$, (Burada α parametri $0 < \alpha < 1$ aralığında verilir). $\varphi(x) \in C(\partial D)$

$$b_i(x) \in C^2(D) \quad (i = \overline{1, n}), \quad c(x) \in C(D)$$

D oblastında təyin olunan $U(x)$ funksiyası üçün $C^\alpha(D)$ ($x \in (0,1)$) fəzasında aşağıdakı sonlu norma ilə verilir:

$$\|U\|_{C^\alpha(D)} = \sup |u(x)| + \sup_{x, y \in D, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Qeyd edək ki, bu məsələnin çəkili Sobolev fəzalarında zəif və güclü həll olunabilənliyinə baxılmış və müsbət nəticələr əldə olunmuşdur. İndi isə həmin məsələnin qoyuluşu bir o qədər modifikasiya olunaraq, yeni formada qoyulan məsələnin Viner mənada ümumiləşmiş həllinin varlığına baxılacaq:

Tutaq ki, $D' = D \setminus \{0\}$, a – isə qeyd edilmiş sərbəst ədəddir. ($a \in R$). Onda modifikasiya olunmuş məsələ aşağıdakı kimi qoyulur:

$$L_u = f, x \in D', U|_{\partial D} = \varphi, U(0) = a \quad (2)$$

Başqa sözlə, O nöqtəsi D oblastından çıxarıldıqdan sonra, həmin nöqtədə funksiyanın aldığı qiymət məsələnin qoyuluşuna daxil edilir.

$\mu(r)$ funksiyası aşağıdakı şəkildə verilir:

$$\mu(r) \in C^\alpha(D), \quad d_1 \leq \mu(r) \leq d_2, \quad d_1 > n - 2, \quad d_2 < \infty \quad (3)$$

İndi isə (2) məsələsinin Viner mənada ümumiləşmiş həllinin varlığına baxaq:

Tutaq ki, $\{D\}$, $M = 1, 2, \dots$ ikiqat hamar səthə malik, genişləndirilə bilən oblastlar ardıcılığıdır. Bu oblastda approxiasiya olunmuş, aşağıdakı şərtləri ödəyən $\overline{D_m}$ alt oblastını daxil edək:

$$\overline{D_m} \subset D, \quad \overline{D_m} \subset D_{m+1}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} D_m = D$$

Həmçinin D oblastı daxilində yerləşən aşağıdakı sferalar ardıcılığına baxaq:

$$S = \left\{ x \mid \left| x - \frac{1}{m} \right| \right\}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Bu sferaların örtükləri ardıcılığı isə

$$Q_m = \left\{ x \mid |x| \leq \frac{1}{m} \right\}, \quad m = 1, 2, \dots$$

olsun.

Tutaq ki, $D'_m = D_m \setminus Q_m$, $m = 1, 2, \dots$

Göstərmək olar ki, m - in kifayət qədər böyük qiymətlərində də D'_m oblastı D -də boş olmayan çoxluq olur.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D'_m = D$$

Fərz edək ki, $\varphi(x)$ funksiyası ∂D -də kəsilməyən funksiyadır. Onun obrazını $\Phi(x)$ ilə işarə edək. m natural ədədinə görə aşağıdakı Dirilik məsələlər ardıcılığına baxaq: $Lu_m = f$, $x \in D'_m$

$$u_m|_{\partial D_m} = \Phi|_{\partial D_m}, \quad u_m|_{S_m} = a \quad (S_m - \text{sferanın səthidir}) \quad (4)$$

(4) məsələsinin Viner mənadada ümumiləşmiş həllə malik olduğunu verməklə, qoyulan məsələnin həllinin varlığına da oxşar metodikanı tətbiq etmiş oluruq.

Tutaq ki, $U_\varphi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} U_m(x)$, $x \in D'$ limiti var.

$U_\varphi(x)$ - ə $u(x)$ funksiyasının ∂D -də (səth üzərində) davametdirilə bilən izi deyəcəyik (onu ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə tapırıq). Həmçinin $U_\varphi(x)$ funksiyasına modifikasiya edilmiş birinci sərhəd məsələsinin ümumiləşmiş həlli də deyəcəyik.

Beləliklə, qoyulan məsələnin həllinin varlığı aşağıdakı teoremlə isbat olunur:

Teorem: Tutaq ki, $\mu(r)$ funksiyası (3) şərtləri ilə verilir, onda hər bir $\varphi(x) \in C(\partial D)$ funksiyası və istənilən $a \in R$ həqiqi ədədi üçün modifikasiya olunmuş (2) – Dirixle məsələsinin Viner mənadada ümumiləşmiş həlli var və

$$U_\varphi(x) \in C^2(D')$$

$$LU_\varphi(x) = f(x) \text{ olur.}$$

İsbatı: Bu teoremi isbat etmək üçün məlum metodikadan istifadə edəcəyik. Əvvəlcə göstərəcəyik ki, ümumiləşmiş $U_\varphi(x)$ funksiyası, onun sərhəddə $\varphi(x)$ funksiyasına yaxınlaşma üsulundan asılı deyil. Əksini fərz etməklə, yəni $\Phi_1(x)$ və $\Phi_2(x)$ kimi iki müxtəlif funksiyanın da sərhəddə $\varphi(x)$ funksiyasına davametdirilə bilən funksiyalar olduğunu qəbul edək, $U_m^i(x)$ Dirixle məsələsinin həlli olduğundan

$$LU_m^i = f, \quad x \in D_m^i, \quad U_m^i|_{\partial D_m} = \Phi_i|_{\partial D_m}, \quad U_m^i|_{S_m} = a$$

Burada $i = 1, 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots$, onda ixtiyari m natural ədədi üçün

$$\omega_m(x) = u_m^1(x) - u_m^2(x)$$

funksiyası da bu Dirixle məsələsinin həlli olar.

$$L\omega_m = 0, \quad x \in D_m^i, \quad \omega_m|_{\partial D_m} = |\Phi_1 - \Phi_2|_{\partial D_m}, \quad \omega_m|_S = 0$$

Maksimum prinsipinə görə isə

$$\sup \omega_m = \max \left\{ \sup_{\partial D_m} \omega_m, \sup_{S_m} \omega_m \right\} \leq \sup_{\partial D_m} |\Phi_1 - \Phi_2|$$

Analoji olaraq göstərə bilərik ki,

$$\inf \omega_m = \min \left\{ \inf_{\partial D_m} \omega_m, \inf_{S_m} \omega_m \right\} \leq -\sup_{\partial D_m} |\Phi_1 - \Phi_2|$$

Nəticədə alırıq ki,

$$\sup_{\partial D_m} |\omega_m| \leq \sup_{\partial D_m} |\Phi_1 - \Phi_2| \quad (5)$$

Digər tərəfdən isə

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{\partial D_m} |\Phi_1 - \Phi_2|$$

(6)

Beləliklə, $\Phi_1(x)$ və $\Phi_2(x)$ funksiyaları sərhəddə $\varphi(x)$ funksiyasına yalnız birqiymətli davametdirilə bilər. $m \rightarrow \infty$ olduqda $\partial D_m \rightarrow \partial D$. (5) və (6) – dan alırıq ki,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{\partial D_m} |\omega_m| = 0$$

Buradan da görünür ki, $U_\varphi(x)$ funksiyasının da sərhəddə $\varphi(x)$ yaxınlaşması da həmin qaydadan asılı deyil.

İndi isə, istənilən m natural ədədi üçün $u_m(x)$ funksiyasının (4) məsələsinin həlli olduğunu göstərək:

Tutaq ki, $i, j = 1, \dots, n$, $x \in D'_m$

$$a_{ij}(x) = \delta_{ij} + \mu(|x|) \frac{x_i x_j}{|x|^2}$$

Burada δ_{ij} Kroneker simvoludur. $x, y \in D'_m$ üçün

$$|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| = \left| \mu(|x|) \frac{x_i x_j}{|x|^2} - \mu(|y|) \frac{y_i y_j}{|y|^2} \right| \leq \left| \mu(|x|) \frac{x_i x_j}{|x|^2} - \mu(|y|) \frac{y_i y_j}{|y|^2} \right| + \left| \mu(|y|) \frac{x_i x_j}{|x|^2} - \mu(|y|) \frac{y_i y_j}{|y|^2} \right| = i_1 + i_2$$

(7)

(3) ifadəsindən istifadə etsək, alırıq:

$$i_1 \leq |\mu(x) - \mu(y)| \leq c_1 |x - y|^\alpha \quad (8)$$

Burada c_1 μ – dən asılı sabitdir.

i_2 üçün də aşağıdakı bərabərsizliyi göstərək:

$$i_2 \leq d_2 \left| \frac{x_i x_j}{|x|^2} - \frac{y_i y_j}{|y|^2} \right| = d_2 \left| \sum_{k=1}^n (x_k - y_k) \frac{\partial}{\partial X_k} \left(\frac{x_i x_j}{|x|^2} \right) \right|_{x=\theta} \quad (\theta \text{ parametri } x \text{ və } y \text{ dəyişənləri arasında}$$

yerləşir)

Alınan son ifadəyə diqqət etsək,

$$\frac{\partial}{\partial X_k} \left(\frac{x_i x_j}{|x|^2} \right) = \frac{\delta_{ik} x_j}{|x|^2} + \frac{\delta_{jk} x_i}{|x|^2} - 2 \frac{x_i x_j x_k}{|x|^4}$$

olur və buradan da

$$\left| \frac{\partial}{\partial X_k} \left(\frac{x_i x_j}{|x|^2} \right) \right|_{x=\theta} \leq \frac{4_k}{|\theta|}$$

bərabərsizliyinin doğru olduğu alınır. $\theta' \in D'_m$ və nəticədə $|\theta| \geq \frac{1}{m}$ olur. Ona görə də

$$i_2 = 4d_2 m \sum_{k=1}^n |x_k - y_k| \leq 4d_2 m \sqrt{n} |x - y| \leq c_2 |x - y|^\alpha m \quad (9)$$

doğrudur. Burada c_2 sabiti μ və n -dən asılıdır. Axırda da (8) və (9) ifadələrini (7) – də nəzərə alsaq,

$$|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq (c_1 + c_2) |x - y|^\alpha$$

Hansı ki, $b_i, j = 1, 2, \dots$ $x, y \in D'_m$

Beləliklə, baxdığımız operatorunda əmsallar D'_m alt oblastında Holder şərtini ödəyir. Digər tərəfdən $\partial D'_m = C^2$, $f(x) = C^\alpha(D)$ olduğundan Şauder teoreminin şərtlərini nəzərə alsaq, istənilən m natural ədədi üçün $U_m(x)$ funksiyasının (4) məsələsinin birqiymətli həlli olduğu alınır.

$$U_m(x) \in C^{2+\alpha}(D'_m) \cap C(D'_m)$$

Bununla da teorem isbat olundu.

ƏDƏBİYYAT

1. Алхутов Ю.А. О классе эллиптических уравнений с вилеровским условием регулярности граничных точек/ НЗВ. АНССР, СЕР. ФТМН.1987 №3 С.22-29
2. Мамедов У.Т. Об устранимых множествах решений уравнения Рилвага – Серрипа в пространстве гильдебых финкций/ Узв АН Азерб в. Сер ФТМН,1998. Т XVIII с .46-51
3. Quliyev C.X. Classical solvability of thr first boundary Value problem for Gilbarg – Serrin equation / Trans. Of Acad. Sci. Azerb. 2000.V. XX №1

ABSTRACT

The solvability of generalized Viner Dirichlet problem for cauplete form Gilbarg-Serrin equation

The right hand side of this equation belongs to the space of functions which are quadratic summable with some power weight. The Viner generalized (Viner mənadada ümumiləşmiş) solvability of the first boundary value problem for cauplete form Gilbarg-Serrin equation is established. The modified Dirichlet problem which accords to the first boundary value problem for cauplete form Gilbarg-Serrin equation is constructel and it is uniquely classical solvability is proved.

РЕЗЮМЕ

Существование обощенного по Випегу решения Задага Дирихле для уравнения польное формы Гилбарга-Серрина

В статье устাপовления обобщенная разрешитость (по Винеру) первой краевой задаци для уравнения польпой формы Гилбарга-Серрина, правая часть которого принадлежит весовом Соволева, квадратичино суммируемых с некоторым степенным весом функцгй. За это построена модифицированная задача Дирихле соответствующая первой краевой задаче для уравнения польное формы Гилбарга-Серрина, и доказана ее одиозначная классическая разрешимость.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə çapa tövsiiyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

Məqaləni çapa təqdim etdi: *Fizika üzrə fəlsəfə doktoru, dosent*
F.Qocayev

АБУЛЬФАЗ МАМЕДОВ

Нахичеванский Государственный Университет

УДК 517.946

О РЕГУЛЯРНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЯТОГО ПОРЯДКА НА ВСЕЙ ОСИ

Açar sözlər: *normal operator, Hilbert fəzası, operator-diferensial tənlik, requlyar həll, requlyar həll olunanlıq*

Key words: *normal operator, Hilbert space, operator-differential equation, regular solution, regular solvability*

Ключевые слова: *нормальный оператор, гильбертово пространство, операторно-дифференциальное уравнение, регулярное решение, регулярная разрешимость*

Рассмотрим полное операторно-дифференциальное уравнение пятого порядка

$$\frac{d^5 u(t)}{dt^5} + \rho(t)A^5 u(t) + \sum_{j=0}^4 A_{5-j} u^{(j)}(t) = f(t), t \in R = (-\infty, \infty), \tag{1}$$

где $f(t), u(t)$ векторзначные функции со значениями в H , а операторные коэффициенты удовлетворяют условиям:

1) A нормальный обратимый оператор, спектр которого содержится в угловом секторе $S_\varepsilon = \left\{ \lambda : |\arg \lambda| \leq \varepsilon, 0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{10} \right\}$;

2) операторы $B_j = A_j A^{-j} (j = \overline{1,5})$ непрерывны в H ;

3)
$$\rho(t) = \begin{cases} \alpha^5, & t \in (0;1), \\ \beta^5, & t \in [1;\infty), \end{cases}$$

где $\alpha > 0, \beta > 0$ и $\alpha \neq \beta$.

Определим следующие гильбертово пространства:

$$L_2(R; H) = \left\{ f : f(t) \in H \text{ почти при всех } t \in R \text{ и } \|f\|_{L_2(R; H)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|_H^2 dt \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

$$W_2^5(R, H) = \left\{ u : \frac{d^5 u}{dt^5}, A^5 u \in L_2(R; H), \|u\|_{W_2^5(R; H)}^2 = \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R; H)}^2 + \|A^5 u\|_{L_2(R; H)}^2 < \infty \right\}.$$

Отметим, что здесь производные понимаются в смысле теории обобщённых функций [1].

При выполнении условия 1) оператор A представляется в виде $A = UC$, где U унитарный, а C положительно определённый оператор в H , причем при $x \in D(A)$ имеет место равенство $\|Ax\| = \|A^* x\| = \|Cx\|$ и $UCx = CUx$, здесь A^* сопряженный оператор с A .

Обозначим через $\{H_\gamma\}$ ($0 < \gamma < \infty$) гильбертово шкалу пространств порождённый оператором C , т.е. $H_\gamma = D(C^\gamma)$, $(x, y)_\gamma = (C^\gamma x, C^\gamma y)$; $x, y \in D(C^\gamma)$.

Определение. Если при любом $f(t) \in L_2(R; H)$ существует $u(t) \in W_2^5(R; H)$, удовлетворяющее уравнению (1) почти всюду в R и имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_2^5(R; H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(R; H)},$$

то уравнение (1) будем называть регулярно разрешимым.

Определим следующие операторы:

$$P_0 u = \frac{d^5 u}{dt^5} + \rho(t) A^5 u, \quad P_1 u = \sum_{j=0}^4 A_{5-j} u^{(j)},$$

здесь $u \in W_2^5(R; H)$. Тогда уравнение (1) можно написать в виде

$$P u = P_0 u + P_1 u = f,$$

где $f \in L_2(R; H)$, $u \in W_2^5(R; H)$.

В данной работе, при некоторых ограничениях на коэффициенты, будем доказывать теорему о регулярной разрешимости уравнения (1).

Сперва докажем следующую теорему.

Теорема – 1. Пусть выполняется условию 1). Тогда уравнение

$$P_0 u \equiv \frac{d^5 u}{dt^5} + \rho(t) A^5 u = f(t) \quad (2)$$

регулярно разрешимо.

Доказательство.

Обозначим через

$$u_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\xi^5 E + \alpha^5 A^5)^{-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i(t-s)\xi} ds \right) d\xi \quad (3)$$

и

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\xi^5 E + \beta^5 A^5)^{-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i(t-s)\xi} ds \right) d\xi, \quad (4)$$

здесь E единичный оператор в H .

Очевидно, что $u_1(t)$ и $u_2(t)$ удовлетворяют соответственно уравнению $\frac{d^5 u}{dt^5} + \alpha^5 A^5 u = f$ и $\frac{d^5 u}{dt^5} + \beta^5 A^5 u = f$ почти всюду в R . Покажем, что $u_1(t), u_2(t) \in W_2^5(R; H)$.

Очевидно, что преобразование Фурье вектор-функции $u_1(t)$ имеет вид:

$$u_1^\wedge(\xi) = (i\xi^5 E + \alpha^5 A^5)^{-1} f^\wedge(\xi), \quad (5)$$

где $f^\wedge(\xi)$ преобразование Фурье вектор-функция $f(t)$. Тогда по теореме Планшереля

$$\|u_1\|_{W_2^5(R; H)}^2 = \left\| \frac{d^5 u_1}{dt^5} \right\|_{L_2(R; H)}^2 + \|A^5 u_1\|_{L_2(R; H)}^2 = \|\xi^5 u_1^\wedge(\xi)\|_{L_2(R; H)}^2 + \|A^5 u_1^\wedge(\xi)\|_{L_2(R; H)}^2 \quad (6)$$

Из спектрального разложения оператора A следует, что при любом $\xi \in R$ имеет место оценки:

$$\left\| A^5 (i\xi^5 E + \alpha^5 A^5)^{-1} \right\| = \text{Sup}_{\lambda \in \sigma(A)} \left| \lambda^5 (i\xi^5 + \alpha^5 \lambda^5)^{-1} \right| \leq \text{Sup}_{\substack{\mu > 0 \\ |\varphi| \leq \varepsilon}} \left| \mu^5 (i\xi^5 + \alpha^5 \mu^5 e^{5i\varphi})^{-1} \right| \leq$$

$$\leq \underset{\substack{\mu > 0 \\ |\varphi| \leq \varepsilon}}{\text{Sup}} \mu^5 \left| \xi^{10} + \alpha^{10} \mu^{10} - 2\alpha^5 \mu^5 |\xi|^5 \sin 5\varphi \right|^{-1/2} \leq \underset{\substack{\mu > 0 \\ |\varphi| \leq \varepsilon}}{\text{Sup}} \mu^5 \left| \xi^{10} + \alpha^{10} \mu^{10} - (\xi^{10} + \alpha^{10} \mu^{10} \sin^2 5\varphi) \right|^{-1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha^5 \cos 5\varepsilon} \quad (7)$$

С учётом (5) и (7) получаем, что

$$\begin{aligned} \left\| A^5 u_1^\wedge(\xi) \right\|_{L_2(R;H)} &= \left\| A^5 (i\xi^5 E + \alpha^5 A^5)^{-1} f^\wedge(\xi) \right\|_{L_2(R;H)} \leq \\ &\leq \left\| A^5 (i\xi^5 E + \alpha^5 A^5)^{-1} \right\| \cdot \left\| f^\wedge(\xi) \right\|_{L_2(R;H)} \leq \frac{1}{\alpha^5 \cos 5\varphi} \cdot \left\| f^\wedge(\xi) \right\|_{L_2(R;H)} \end{aligned}$$

Тогда ясно, что $A^5 u_1^\wedge(\xi) \in L_2(R;H)$.

Теперь докажем, что $\xi^5 u_1^\wedge(\xi) \in L_2(R;H)$.

Так как

$$\begin{aligned} \left\| \xi^5 u_1^\wedge(\xi) \right\|_{L_2(R;H)} &= \left\| \xi^5 (i\xi^5 E + \alpha^5 A^5)^{-1} f^\wedge(\xi) \right\|_{L_2(R;H)} \leq \underset{\xi}{\text{Sup}} \left\| \xi^5 (i\xi^5 E + \alpha^5 A^5)^{-1} \right\| \cdot \left\| f^\wedge(\xi) \right\|_{L_2(R;H)} = \\ &= \underset{\xi}{\text{Sup}} \left\| \xi^5 (i\xi^5 E + \alpha^5 A^5)^{-1} \right\| \cdot \left\| f(t) \right\|_{L_2(R;H)}, \end{aligned} \quad (8)$$

то оценим норму $\left\| \xi^5 (i\xi^5 E + \alpha^5 A^5)^{-1} \right\|$.

Используя спектральное разложение оператора A , при любом $\xi \in R$ имеем:

$$\begin{aligned} \left\| \xi^5 (i\xi^5 E + \alpha^5 A^5)^{-1} \right\| &= \underset{\lambda \in \sigma(A)}{\text{Sup}} \left| \xi^5 (i\xi^5 + \alpha^5 \lambda^5)^{-1} \right| = \underset{\lambda \in \sigma(A)}{\text{Sup}} \left| \xi^5 (i\xi^5 + \alpha^5 |\lambda|^5 (\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi))^{-1} \right| \leq \\ &\leq \underset{\substack{\mu > 0 \\ |\varphi| \leq \varepsilon}}{\text{Sup}} \left| \xi^5 (i\xi^5 + \alpha^5 \mu^5 (\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi))^{-1} \right| = \underset{\substack{\mu > 0 \\ |\varphi| \leq \varepsilon}}{\text{Sup}} \left| \xi^5 \left(\alpha^5 \mu^5 \cos 5\varphi + i(\xi^5 + \alpha^5 \mu^5 \sin 5\varphi) \right)^{-1} \right| = \\ &= \underset{\substack{\mu > 0 \\ |\varphi| \leq \varepsilon}}{\text{Sup}} \left| \xi^5 \left(\alpha^{10} \mu^{10} \cos^2 5\varphi + \xi^{10} + 2\xi^5 \alpha^5 \mu^5 \sin 5\varphi + \alpha^{10} \mu^{10} \sin^2 5\varphi \right)^{-1/2} \right| \leq \\ &\leq \underset{\substack{\mu > 0 \\ |\varphi| \leq \varepsilon}}{\text{Sup}} \left| \xi^5 \left(\xi^{10} + \alpha^{10} \mu^{10} - 2|\xi|^5 \alpha^5 \mu^5 \sin 5\varphi \right)^{-1/2} \right| \leq \underset{\substack{\mu > 0 \\ |\varphi| \leq \varepsilon}}{\text{Sup}} \left| \xi^5 \left(\xi^{10} + \alpha^{10} \mu^{10} \right)^{-1/2} \cdot (1 - \sin 5\varphi)^{-1/2} \right| \leq (1 - \sin 5\varepsilon)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, при любом $\xi \in R$

$$\left\| \xi^5 (i\xi^5 E + \alpha^5 A^5)^{-1} \right\| \leq (1 - \sin 5\varepsilon)^{-1/2}.$$

С учётом этого неравенство в (8) получаем, что

$$\left\| \xi^5 u_1^\wedge(\xi) \right\|_{L_2(R;H)} \leq \frac{1}{(1 - \sin 5\varepsilon)^{1/2}} \cdot \left\| f(t) \right\|_{L_2(R;H)}.$$

Отсюда вытекает, что $\xi^5 u_1^\wedge(\xi) \in L_2(R;H)$.

Следовательно, $A^5 u_1^\wedge(\xi) \in L_2(R;H)$, $\xi^5 u_1^\wedge(\xi) \in L_2(R;H)$ и поэтому $u_1(t) \in W_2^5(R;H)$.

Аналогично доказывается, что $u_2(t) \in W_2^5(R;H)$.

Обозначим через $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ сужения вектор-функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ соответственно на R_- и R_+ . Тогда $\psi_1(t) \in W_2^5(R_-; H)$, $\psi_2(t) \in W_2^5(R_+; H)$ и по теореме о следах ([1]) $\psi_i^{(j)}(0) \in H_{5-j-\frac{1}{2}}$, $i=1,2$; $j=\overline{0,4}$.

Построим вектор-функцию

$$u(t) = \begin{cases} \theta_1(t) = \psi_1(t) + e^{\alpha\lambda_1 t} \varphi_1 + e^{\alpha\lambda_5 t} \varphi_2, t \in R_- = (-\infty, 0] \\ \theta_2(t) = \psi_2(t) + e^{\beta\lambda_2 t} \varphi_3 + e^{\beta\lambda_3 t} \varphi_4 + e^{\beta\lambda_4 t} \varphi_5, t \in R_+ = [0, \infty), \end{cases}$$

где $\lambda_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{5} + i \sin \frac{(2k-1)\pi}{5}$ ($k=\overline{1,5}$) корни уравнения $\lambda^5 + 1 = 0$, а φ_j ($j=\overline{1,5}$)

пока неизвестные векторы из $H_{9/2}$. Очевидно, что вектор-функция $u(t)$ является общим решением уравнения (1). Подберем φ_j ($j=\overline{1,5}$) так чтобы $u(t) \in W_2^5(R; H)$. Тогда должны быть $\theta_1^{(k)}(0) = \theta_2^{(k)}(0)$, $k=\overline{0,4}$. Отсюда получаем следующую систему уравнений относительно φ_j , $j=\overline{1,5}$:

$$\begin{cases} \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 - \varphi_5 = \psi_2(0) - \psi_1(0) \\ \alpha\lambda_1\varphi_1 + \alpha\lambda_5\varphi_2 - \beta\lambda_2\varphi_3 - \beta\lambda_3\varphi_4 - \beta\lambda_4\varphi_5 = A^{-1}(\psi_2'(0) - \psi_1'(0)) \\ \alpha^2\lambda_1^2\varphi_1 + \alpha^2\lambda_5^2\varphi_2 - \beta^2\lambda_2^2\varphi_3 - \beta^2\lambda_3^2\varphi_4 - \beta^2\lambda_4^2\varphi_5 = A^{-2}(\psi_2''(0) - \psi_1''(0)) \\ \alpha^3\lambda_1^3\varphi_1 + \alpha^3\lambda_5^3\varphi_2 - \beta^3\lambda_2^3\varphi_3 - \beta^3\lambda_3^3\varphi_4 - \beta^3\lambda_4^3\varphi_5 = A^{-3}(\psi_2'''(0) - \psi_1'''(0)) \\ \alpha^4\lambda_1^4\varphi_1 + \alpha^4\lambda_5^4\varphi_2 - \beta^4\lambda_2^4\varphi_3 - \beta^4\lambda_3^4\varphi_4 - \beta^4\lambda_4^4\varphi_5 = A^{-4}(\psi_2^{IV}(0) - \psi_1^{IV}(0)) \end{cases} \quad (9)$$

Из теоремы о следах вытекает, что $\chi_{k+1} = A^{-k}(\psi_2^{(k)}(0) - \psi_1^{(k)}(0)) \in H_{9/2}$ ($k=\overline{0,4}$) и поэтому $\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5) \in H_{9/2}^5 = H_{9/2} \times H_{9/2} \times H_{9/2} \times H_{9/2} \times H_{9/2}$.

Система (9) имеет следующую основную операторную матрицу:

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} E & E & -E & -E & -E \\ \alpha\lambda_1 E & \alpha\lambda_5 E & -\beta\lambda_2 E & -\beta\lambda_3 E & -\beta\lambda_4 E \\ \alpha^2\lambda_1^2 E & \alpha^2\lambda_5^2 E & -\beta^2\lambda_2^2 E & -\beta^2\lambda_3^2 E & -\beta^2\lambda_4^2 E \\ \alpha^3\lambda_1^3 E & \alpha^3\lambda_5^3 E & -\beta^3\lambda_2^3 E & -\beta^3\lambda_3^3 E & -\beta^3\lambda_4^3 E \\ \alpha^4\lambda_1^4 E & \alpha^4\lambda_5^4 E & -\beta^4\lambda_2^4 E & -\beta^4\lambda_3^4 E & -\beta^4\lambda_4^4 E \end{bmatrix},$$

здесь E единичный оператор в H . Очевидно, что

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ \alpha\lambda_1 & \alpha\lambda_5 & -\beta\lambda_2 & -\beta\lambda_3 & -\beta\lambda_4 \\ \alpha^2\lambda_1^2 & \alpha^2\lambda_5^2 & -\beta^2\lambda_2^2 & -\beta^2\lambda_3^2 & -\beta^2\lambda_4^2 \\ \alpha^3\lambda_1^3 & \alpha^3\lambda_5^3 & -\beta^3\lambda_2^3 & -\beta^3\lambda_3^3 & -\beta^3\lambda_4^3 \\ \alpha^4\lambda_1^4 & \alpha^4\lambda_5^4 & -\beta^4\lambda_2^4 & -\beta^4\lambda_3^4 & -\beta^4\lambda_4^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix}. \quad \begin{array}{l} \text{После} \\ \text{примене} \\ \text{ния} \\ \text{разложе} \\ \text{ния} \\ \text{детерми} \end{array}$$

нанта Вандермонда получаем, что

Тогда операторная матрица Δ_0 обратима и из (9) однозначно получаем, что

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5) = \Delta_0^{-1} \chi.$$

Таким образом $u(t) \in W_2^5(R; H)$.

$$\delta = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ \alpha\lambda_1 & \alpha\lambda_5 & -\beta\lambda_2 & -\beta\lambda_3 & -\beta\lambda_4 \\ \alpha^2\lambda_1^2 & \alpha^2\lambda_5^2 & -\beta^2\lambda_2^2 & -\beta^2\lambda_3^2 & -\beta^2\lambda_4^2 \\ \alpha^3\lambda_1^3 & \alpha^3\lambda_5^3 & -\beta^3\lambda_2^3 & -\beta^3\lambda_3^3 & -\beta^3\lambda_4^3 \\ \alpha^4\lambda_1^4 & \alpha^4\lambda_5^4 & -\beta^4\lambda_2^4 & -\beta^4\lambda_3^4 & -\beta^4\lambda_4^4 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Теперь покажем, что

однородное уравнение $P_0 u \equiv \frac{d^5 u}{dt^5} + \rho(t) A^5 u = 0$ имеет только нулевое решение. Общее решение этого уравнения из пространства $W_2^5(R; H)$ имеет вид:

$$u_0(t) = \begin{cases} e^{\alpha\lambda_1 t} \varphi_1 + e^{\alpha\lambda_5 t} \varphi_2, & t \in R_- = (-\infty, 0] \\ e^{\beta\lambda_2 t} \varphi_3 + e^{\beta\lambda_3 t} \varphi_4 + e^{\beta\lambda_4 t} \varphi_5, & t \in R_+ = [0, \infty), \end{cases}$$

Из условия $u_0(t) \in W_2^5(R; H)$ следует, что $u_0^{(j)}(+0) = u_0^{(j)}(-0)$, $j = \overline{0, 4}$.

Отсюда получаем следующую систему уравнений относительно φ_i ($i = \overline{1, 5}$):

$$\begin{cases} \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 - \varphi_5 = 0 \\ \alpha\lambda_1\varphi_1 + \alpha\lambda_5\varphi_2 - \beta\lambda_2\varphi_3 - \beta\lambda_3\varphi_4 - \beta\lambda_4\varphi_5 = 0 \\ \alpha^2\lambda_1^2\varphi_1 + \alpha^2\lambda_5^2\varphi_2 - \beta^2\lambda_2^2\varphi_3 - \beta^2\lambda_3^2\varphi_4 - \beta^2\lambda_4^2\varphi_5 = 0 \\ \alpha^3\lambda_1^3\varphi_1 + \alpha^3\lambda_5^3\varphi_2 - \beta^3\lambda_2^3\varphi_3 - \beta^3\lambda_3^3\varphi_4 - \beta^3\lambda_4^3\varphi_5 = 0 \\ \alpha^4\lambda_1^4\varphi_1 + \alpha^4\lambda_5^4\varphi_2 - \beta^4\lambda_2^4\varphi_3 - \beta^4\lambda_3^4\varphi_4 - \beta^4\lambda_4^4\varphi_5 = 0. \end{cases}$$

Так как основной определитель этой системы $\delta \neq 0$, то $\varphi_i = 0$ ($i = \overline{1, 5}$). Следовательно, однородное уравнение $P_0 u = 0$ имеет только нулевое решение из пространства $W_2^5(R; H)$. Поэтому оператор P_0 отображает пространство $W_2^5(R; H)$ на $L_2(R; H)$ изоморфно. С другой стороны для любого $u \in W_2^5(R; H)$

$$\begin{aligned} \|P_0 u\|_{L_2(R; H)}^2 &= \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} + \rho(t) A^5 u \right\|_{L_2(R; H)}^2 \leq 2 \left(\left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R; H)}^2 + \left\| \rho(t) A^5 u \right\|_{L_2(R; H)}^2 \right) \leq \\ &\leq 2 \left(\left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R; H)}^2 + \max(\alpha^{10}, \beta^{10}) \|A^5 u\|_{L_2(R; H)}^2 \right) \leq \text{const} \|u\|_{W_2^5(R; H)}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор P_0 ограничен и изоморфно отображает пространство $W_2^5(R; H)$ на $L_2(R; H)$. Тогда, по теореме Банаха об обратном операторе, существует $P_0^{-1} : L_2(R; H) \rightarrow W_2^5(R; H)$ и $\|P_0^{-1} f\|_{W_2^5(R; H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(R; H)}$, другими словами

$$\|u\|_{W_2^5(R; H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(R; H)}.$$

Теорема доказана.

Чтобы доказать регулярную разрешимость уравнения (1), в некоторых условиях на коэффициенты, надо оценить нормы операторов промежуточных производных с нормой главной части уравнения (1).

Докажем следующую теорему.

Теорема – 2. Пусть A нормальный обратимый оператор, спектр которого содержится в угловом секторе

$$S_\varepsilon = \left\{ \lambda : |\arg \lambda| \leq \varepsilon, 0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{10} \right\}.$$

Тогда имеет следующие оценки:

$$\|A^{5-j}u\|_{L_2(R;H)} \leq C_j(\varepsilon; \alpha; \beta) \|P_0u\|_{L_2(R;H)},$$

где коэффициенты $C_j(\varepsilon; \alpha; \beta)$ ($j=0,4$) определяются следующим образом:

$$C_0(\varepsilon; \alpha; \beta) = \frac{1}{\min(\alpha^5, \beta^5)} \cdot \frac{1}{\cos 5\varepsilon},$$

$$C_1(\varepsilon; \alpha; \beta) = \frac{2^{4/5}}{5^{1/2}} \cdot \frac{\max(\alpha^{1/2}; \beta^{1/2})}{\min(\alpha^{9/2}; \beta^{9/2})} \cdot (1 - \sin 5\varepsilon)^{-1/2},$$

$$C_2(\varepsilon; \alpha; \beta) = \frac{2^{1/5} 3^{3/10}}{5^{1/2}} \cdot \frac{\max(\alpha; \beta)}{\min(\alpha^4; \beta^4)} \cdot (1 - \sin 5\varepsilon)^{-1/2},$$

$$C_3(\varepsilon; \alpha; \beta) = \frac{2^{1/5} 3^{3/10}}{5^{1/2}} \cdot \frac{\max(\alpha^{3/2}; \beta^{3/2})}{\min(\alpha^{7/2}; \beta^{7/2})} \cdot (1 - \sin 5\varepsilon)^{-1/2},$$

$$C_4(\varepsilon; \alpha; \beta) = \frac{2^{4/5}}{5^{1/2}} \cdot \frac{\max(\alpha^2; \beta^2)}{\min(\alpha^3; \beta^3)} \cdot (1 - \sin 5\varepsilon)^{-1/2}.$$

Доказательство. Сперва докажем, что при $u(t) \in W_2^5(R; H)$ имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \left\| \rho^{-1/2} P_0 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 &\geq \left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^2 + \left\| \rho^{1/2} A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 - \\ &- 2 \sin 5\varepsilon \left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)} \cdot \left\| \rho^{1/2} A^5 u \right\|_{L_2(R;H)} \end{aligned} \quad (10)$$

Для доказательства неравенство (10) умножим обе стороны равенства

$$P_0 u \equiv \frac{d^5 u}{dt^5} + \rho(t) A^5 u$$

скалярно на функцию $\rho^{-1/2}$. Тогда получаем:

$$\left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 u}{dt^5} + \rho^{1/2} A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 = \left\| \rho^{1/2} P_0 u \right\|_{L_2(R;H)}^2.$$

Отсюда имеем

$$\left\| \rho^{1/2} P_0 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 = \left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^2 + \left\| \rho^{1/2} A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{d^5 u}{dt^5}, A^5 u \right)_{L_2(R;H)}. \quad (11)$$

После интегрирования по частям получаем

$$\left(\frac{d^5 u}{dt^5}, A^5 u \right)_{L_2(R;H)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^5 u}{dt^5}, A^5 u \right)_H dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \left(A^{*5} u, \frac{d^5 u}{dt^5} \right)_H dt = - \left(A^{*5} u, \frac{d^5 u}{dt^5} \right)_{L_2(R;H)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \left| 2 \operatorname{Re} \left(\frac{d^5 u}{dt^5}, A^5 u \right)_{L_2(R;H)} \right| = \left| \left(\frac{d^5 u}{dt^5}, A^5 u \right)_{L_2(R;H)} + \left(A^5 u, \frac{d^5 u}{dt^5} \right)_{L_2(R;H)} \right| = \\ & = \left| \left(A^5 u, \frac{d^5 u}{dt^5} \right)_{L_2(R;H)} - \left(A^{*5} u, \frac{d^5 u}{dt^5} \right)_{L_2(R;H)} \right| = \left| \left((A^5 - A^{*5}) u, \frac{d^5 u}{dt^5} \right)_{L_2(R;H)} \right| = \\ & = \left| \left((E - A^{*5} A^{-5}) A^5 u, \frac{d^5 u}{dt^5} \right)_{L_2(R;H)} \right| \leq \left| \left((E - A^{*5} A^{-5}) \rho^{1/2} A^5 u, \rho^{-1/2} \frac{d^5 u}{dt^5} \right)_{L_2(R;H)} \right| \leq \\ & \leq \left\| E - (A^* A^{-1})^5 \right\| \cdot \left\| \rho^{1/2} A^5 u \right\|_{L_2(R;H)} \cdot \left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}. \end{aligned}$$

Из спектрального разложения оператора A следует, что

$$\left\| E - (A^* A^{-1})^5 \right\| \leq \operatorname{Sup}_{\lambda \in \sigma(A)} \left| 1 - \left(\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \right)^5 \right| \leq 2 \sin 5\varepsilon.$$

Тогда

$$2 \operatorname{Re} \left(\frac{d^5 u}{dt^5}, A^5 u \right)_{L_2(R;H)} \leq 2 \sin 5\varepsilon \left\| \rho^{1/2} A^5 u \right\|_{L_2(R;H)} \cdot \left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}.$$

Учитывая это неравенство в (11) получаем верность (10). Далее пользуясь (10) получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \rho^{-1/2} P_0 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 \geq \left\| \rho^{1/2} A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 + \left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^2 - \\ & - \left(\sin^2 5\varepsilon \left\| \rho^{1/2} A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 + \left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right) = \cos^2 5\varepsilon \left\| \rho^{1/2} A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Используя неравенство (12) получаем, что

$$\begin{aligned} & \left\| A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 = \left\| \rho^{-1/2} \left(\rho^{1/2} A^5 u \right) \right\|_{L_2(R;H)}^2 \leq \max \rho^{-1}(t) \left\| \rho^{1/2} A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 \leq \\ & \leq \frac{1}{\min(\alpha^5, \beta^5)} \cdot \frac{1}{\cos^2 5\varepsilon} \left\| \rho^{-1/2} P_0 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 \leq \frac{1}{\min(\alpha^{10}, \beta^{10})} \cdot \frac{1}{\cos^2 5\varepsilon} \left\| P_0 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\left\| A^5 u \right\|_{L_2(R;H)} \leq \frac{1}{\min(\alpha^5, \beta^5)} \frac{1}{\cos 5\varepsilon} \left\| P_0 u \right\|_{L_2(R;H)} = C_0(\varepsilon; \alpha; \beta) \left\| P_0 u \right\|_{L_2(R;H)},$$

здесь $C_0(\varepsilon; \alpha; \beta) = \frac{1}{\min(\alpha^5, \beta^5)} \frac{1}{\cos 5\varepsilon}.$

С помощью неравенство (10) получим

$$\left\| \rho^{1/2} A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 + \left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \leq (1 - \sin 5\varepsilon)^{-1} \left\| \rho^{-1/2} P_0 u \right\|_{L_2(R;H)}^2. \quad (13)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \left\| A \frac{d^4 u}{dt^4} \right\|_{L_2(R;H)}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(A \frac{d^4 u}{dt^4}, A \frac{d^4 u}{dt^4} \right)_H dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(C \frac{d^4 u}{dt^4}, C \frac{d^4 u}{dt^4} \right)_H dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \left(C^2 \frac{d^3 u}{dt^3}, \frac{d^5 u}{dt^5} \right)_H dt \leq \\ &\leq \left\| C^2 \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(R;H)} \cdot \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)} = \left\| A^2 \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(R;H)} \cdot \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)} \end{aligned} \quad (14)$$

Таким же способом получаем:

$$\left\| A^2 \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \leq \left\| A^4 \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(R;H)} \cdot \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}, \quad (15)$$

$$\left\| A^3 \frac{d^2 u}{dt^2} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \leq \left\| A^5 u \right\|_{L_2(R;H)} \cdot \left\| A \frac{d^4 u}{dt^4} \right\|_{L_2(R;H)}, \quad (16)$$

$$\left\| A^4 \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \leq \left\| A^5 u \right\|_{L_2(R;H)} \cdot \left\| A^3 \frac{d^2 u}{dt^2} \right\|_{L_2(R;H)}. \quad (17)$$

Учитывая (14)-(17) и применив неравенство (13) получаем следующим образом остальные требуемые оценки:

$$\begin{aligned} \mathbf{1.} \quad \left\| A^4 \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(R;H)}^2 &\leq \left\| A^5 u \right\|_{L_2(R;H)} \cdot \left\| A^3 \frac{d^2 u}{dt^2} \right\|_{L_2(R;H)} \leq \left\| A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^{3/2} \cdot \left\| A \frac{d^4 u}{dt^4} \right\|_{L_2(R;H)}^{1/2} \leq \\ &\leq \left\| A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^{3/2} \cdot \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^{1/4} \cdot \left\| A^2 \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(R;H)}^{1/4} \leq \left\| A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^{3/2} \cdot \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^{3/8} \cdot \left\| A^4 \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(R;H)}^{1/8} \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что при любом $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \left\| A^4 \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(R;H)}^2 &\leq \left(\left\| A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right)^{4/5} \cdot \left(\left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right)^{1/5} \leq \frac{\max \rho^{1/5}(t)}{\min \rho^{4/5}(t)} \cdot \left(\left\| \rho^{1/2} A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right)^{4/5} \times \\ &\times \left(\left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right)^{1/5} = \frac{\max(\alpha; \beta)}{\min(\alpha^4; \beta^4)} \cdot \left(\delta \left\| \rho^{1/2} A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right)^{4/5} \cdot \left(\frac{1}{\delta^4} \left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right)^{1/5}. \end{aligned}$$

После применения неравенства Юнга имеем

$$\left\| A^4 \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \leq \frac{\max(\alpha; \beta)}{\min(\alpha^4; \beta^4)} \cdot \left(\frac{4\delta}{5} \left\| \rho^{1/2} A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 + \frac{1}{5\delta^4} \left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right).$$

Теперь выбираем $\delta > 0$ так, что $\frac{4\delta}{5} = \frac{1}{5\delta^4}$, т.е. $\delta = 4^{-1/5}$. Тогда учитывая неравенство

(13) получаем, что

$$\begin{aligned} \left\| A^4 \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(R;H)}^2 &\leq \frac{4^{4/5}}{5} \cdot \frac{\max(\alpha; \beta)}{\min(\alpha^4; \beta^4)} \cdot (1 - \sin 5\varepsilon)^{-1} \left\| \rho^{-1/2} P_0 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 \leq \\ &\leq \frac{4^{4/5}}{5} \cdot \frac{\max(\alpha; \beta)}{\min(\alpha^9; \beta^9)} \cdot (1 - \sin 5\varepsilon)^{-1} \left\| P_0 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\left\| A^4 \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(R;H)} \leq \frac{16^{1/5}}{5^{1/2}} \cdot \frac{\max(\alpha^{1/2}; \beta^{1/2})}{\min(\alpha^{9/2}; \beta^{9/2})} \cdot (1 - \sin 5\varepsilon)^{-1/2} \left\| P_0 u \right\|_{L_2(R;H)} = C_1(\varepsilon; \alpha; \beta) \left\| P_0 u \right\|_{L_2(R;H)},$$

здесь $C_1(\varepsilon; \alpha; \beta) = \frac{16^{1/5}}{5^{1/2}} \cdot \frac{\max(\alpha^{1/2}; \beta^{1/2})}{\min(\alpha^{9/2}; \beta^{9/2})} \cdot (1 - \sin 5\varepsilon)^{-1/2}$

$$\begin{aligned} 2. \left\| A^3 \frac{d^2 u}{dt^2} \right\|_{L_2(R;H)}^2 &\leq \left\| A^4 \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(R;H)} \cdot \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)} \leq \left\| A^5 u \right\|_{L_2(R;H)} \cdot \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^{1/2} \cdot \left\| A^2 \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(R;H)}^{1/2} \leq \\ &\leq \left\| A^5 u \right\|_{L_2(R;H)} \cdot \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^{3/4} \cdot \left\| A^4 \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(R;H)}^{1/4} \leq \left\| A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^{9/8} \cdot \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^{3/4} \cdot \left\| A^3 \frac{d^2 u}{dt^2} \right\|_{L_2(R;H)}^{1/8}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\left\| A^3 \frac{d^2 u}{dt^2} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \leq \left(\left\| A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right)^{3/5} \left(\left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right)^{2/5} \leq \frac{\max(\alpha^2; \beta^2)}{\min(\alpha^3; \beta^3)} \cdot \left(\left\| \rho^{1/2} A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right)^{3/5} \left(\left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right)^{2/5}$$

Тогда применяя неравенство Юнга, при $\delta > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \left\| A^3 \frac{d^2 u}{dt^2} \right\|_{L_2(R;H)}^2 &\leq \frac{\max(\alpha^2; \beta^2)}{\min(\alpha^3; \beta^3)} \cdot \left(\frac{1}{\delta^2} \left\| \rho^{1/2} A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right)^{3/5} \left(\delta^3 \left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right)^{2/5} \leq \\ &\leq \frac{\max(\alpha^2; \beta^2)}{\min(\alpha^3; \beta^3)} \cdot \left(\frac{3}{5\delta^2} \left\| \rho^{1/2} A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 + \frac{2\delta^3}{5} \left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right). \end{aligned}$$

При $\frac{3}{5\delta^2} = \frac{2\delta^3}{5}$, т.е. $\delta = \frac{3^{1/5}}{2^{1/5}}$, с учётом (13) получаем, что

$$\left\| A^3 \frac{d^2 u}{dt^2} \right\|_{L_2(R;H)} \leq \frac{2^{1/5} 3^{3/10}}{5^{1/2}} \cdot \frac{\max(\alpha; \beta)}{\min(\alpha^4; \beta^4)} \cdot (1 - \sin 5\varepsilon)^{-1/2} \left\| P_0 u \right\|_{L_2(R;H)} = C_2(\varepsilon; \alpha; \beta) \left\| P_0 u \right\|_{L_2(R;H)},$$

здесь $C_2(\varepsilon; \alpha; \beta) = \frac{2^{1/5} \cdot 3^{3/10}}{5^{1/2}} \cdot \frac{\max(\alpha; \beta)}{\min(\alpha^4; \beta^4)} \cdot (1 - \sin 5\varepsilon)^{-1/2}$.

$$\begin{aligned}
3. \quad \left\| A^2 \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(R;H)}^2 &\leq \left\| A^4 \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(R;H)} \cdot \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)} \leq \left\| A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^{1/2} \cdot \left\| A^3 \frac{d^2 u}{dt^2} \right\|_{L_2(R;H)}^{1/2} \cdot \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)} \leq \\
&\leq \left\| A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^{3/4} \cdot \left\| A \frac{d^4 u}{dt^4} \right\|_{L_2(R;H)}^{1/4} \cdot \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)} \leq \left\| A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^{3/4} \cdot \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^{9/8} \cdot \left\| A^2 \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(R;H)}^{1/8}
\end{aligned}$$

Применяя неравенство Юнга получаем, что при любом $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
\left\| A^2 \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(R;H)}^2 &\leq \left(\left\| A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 \cdot \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right)^{2/5} \leq \frac{\max(\alpha^3; \beta^3)}{\min(\alpha^2; \beta^2)} \cdot \left(\frac{1}{\delta^3} \left\| \rho^{1/2} A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right)^{2/5} \times \\
&\times \left(\delta^2 \left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right)^{3/5} \leq \frac{\max(\alpha^3; \beta^3)}{\min(\alpha^2; \beta^2)} \cdot \left(\frac{2}{5\delta^3} \left\| \rho^{1/2} A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 + \frac{3\delta^2}{5} \left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right).
\end{aligned}$$

При $\frac{3}{5\delta^3} = \frac{3\delta^2}{5}$, т.е. $\delta = \frac{2^{1/5}}{3^{1/5}}$ с учётом (13) получаем, что

$$\left\| A^2 \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(R;H)} \leq \frac{2^{1/5} 3^{3/10}}{5^{1/2}} \cdot \frac{\max(\alpha^{3/2}; \beta^{3/2})}{\min(\alpha^{7/2}; \beta^{7/2})} \cdot (1 - \sin 5\varepsilon)^{-1/2} \|P_0 u\|_{L_2(R;H)},$$

здесь $C_3(\varepsilon; \alpha; \beta) = \frac{2^{1/5} 3^{3/10}}{5^{1/2}} \cdot \frac{\max(\alpha^{3/2}; \beta^{3/2})}{\min(\alpha^{7/2}; \beta^{7/2})} \cdot (1 - \sin 5\varepsilon)^{-1/2}$.

4. Оценим норму $A \frac{d^4 u}{dt^4}$.

$$\begin{aligned}
\left\| A \frac{d^4 u}{dt^4} \right\|_{L_2(R;H)}^2 &\leq \left\| A^2 \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(R;H)} \cdot \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)} \leq \left\| A^4 \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(R;H)}^{1/2} \cdot \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^{3/2} \leq \\
&\leq \left\| A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^{1/4} \cdot \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^{3/2} \cdot \left\| A^3 \frac{d^2 u}{dt^2} \right\|_{L_2(R;H)}^{1/4} \leq \left\| A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^{3/8} \cdot \left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^{3/2} \cdot \left\| A \frac{d^4 u}{dt^4} \right\|_{L_2(R;H)}^{1/8}.
\end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\left\| A \frac{d^4 u}{dt^4} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \leq \left(\left\| A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right)^{1/5} \cdot \left(\left\| \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right)^{4/5}.$$

При $\delta > 0$ применяя неравенство Юнга получаем:

$$\left\| A \frac{d^4 u}{dt^4} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \leq \frac{\max(\alpha^4; \beta^4)}{\min(\alpha; \beta)} \cdot \left(\frac{1}{\delta^4} \left\| \rho^{1/2} A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right)^{1/5} \cdot \left(\delta \left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right)^{4/5} \leq$$

$$\leq \frac{\max(\alpha^4; \beta^4)}{\min(\alpha; \beta)} \cdot \left(\frac{1}{5\delta^4} \left\| \rho^{1/2} A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 + \frac{4\delta}{5} \left\| \rho^{-1/2} \frac{d^5 u}{dt^5} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right).$$

При $\frac{1}{5\delta^4} = \frac{4\delta}{5}$, т.е. $\delta = 4^{-1/5}$, с учётом (13) получаем, что

$$\begin{aligned} \left\| A \frac{d^4 u}{dt^4} \right\|_{L_2(R;H)}^2 &\leq \frac{4^{4/5}}{5} \cdot \frac{\max(\alpha^4; \beta^4)}{\min(\alpha; \beta)} \cdot \left(\left\| \rho^{1/2} A^5 u \right\|_{L_2(R;H)}^2 + \left\| \rho^{-1/2} \frac{d^3 u}{dt^3} \right\|_{L_2(R;H)}^2 \right) \leq \frac{16^{2/5}}{5} \cdot \frac{\max(\alpha^4; \beta^4)}{\min(\alpha; \beta)} \times \\ &\times (1 - \sin 5\varepsilon)^{-1} \left\| \rho^{-1/2} P_0 u \right\|_{L_2(R;H)}^2. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\left\| A \frac{d^4 u}{dt^4} \right\|_{L_2(R;H)} \leq \frac{16^{1/5}}{5^{1/2}} \cdot \frac{\max(\alpha^2; \beta^2)}{\min(\alpha^3; \beta^3)} \cdot (1 - \sin 5\varepsilon)^{-1/2} \|P_0 u\|_{L_2(R;H)} = C_4(\varepsilon; \alpha; \beta) \|P_0 u\|_{L_2(R;H)},$$

здесь $C_4(\varepsilon; \alpha; \beta) = \frac{16^{1/5}}{5^{1/2}} \cdot \frac{\max(\alpha^2; \beta^2)}{\min(\alpha^3; \beta^3)} \cdot (1 - \sin 5\varepsilon)^{-1/2}$.

Теорема полностью доказана.

Теперь мы можем доказать основную теорему о регулярной разрешимости уравнения (1).

Теорема 3. Пусть выполняются условия 1), 2) и имеет место неравенство

$$K(\varepsilon; \alpha; \beta) = \sum_{j=0}^4 C_j(\varepsilon; \alpha; \beta) \|B_{5-j}\| < 1,$$

где постоянные числа $C_j(\varepsilon; \alpha; \beta)$ ($j = \overline{0,4}$) определяются из теоремы 2. Тогда уравнение (1) регулярно разрешимо.

Доказательство. После замены $P_0 u = v$ мы можем написать уравнение (1), т.е.

$$Pu = P_0 u + P_1 u \quad \text{в виде} \quad v + P_1 P_0^{-1} v = f \quad \text{или} \quad \text{в виде} \quad (E + P_1 P_0^{-1})v = f, \quad \text{где} \\ v \in L_2(R; H), \quad f \in L_2(R; H).$$

С другой стороны для любого $v \in L_2(R; H)$ имеем:

$$\begin{aligned} \left\| P_1 P_0^{-1} v \right\|_{L_2(R;H)} &= \left\| P_1 u \right\|_{L_2(R;H)} = \left\| \sum_{j=0}^4 A_{5-j} u^{(j)} \right\|_{L_2(R;H)} \leq \sum_{j=0}^4 \left\| A_{5-j} u^{(j)} \right\|_{L_2(R;H)} = \\ &= \sum_{j=0}^4 \left\| A_{5-j} A^{-(5-j)} (A^{5-j} u^{(j)}) \right\|_{L_2(R;H)} \leq \sum_{j=0}^4 \left\| A_{5-j} A^{-(5-j)} \right\| \cdot \left\| A^{5-j} u^{(j)} \right\|_{L_2(R;H)} = \\ &= \sum_{j=0}^4 \|B_{5-j}\| \cdot C_j(\varepsilon; \alpha; \beta) \|P_0 u\|_{L_2(R;H)} = K(\varepsilon; \alpha; \beta) \|v\|_{L_2(R;H)}, \end{aligned}$$

где постоянные числа $C_j(\varepsilon; \alpha; \beta)$ ($j = \overline{0,4}$) определяются из теоремы 2.

Так как $K(\varepsilon; \alpha; \beta) < 1$, то оператор $E + P_1 P_0^{-1}$ обратим в $L_2(R; H)$, поэтому $v = P_0 u = (E + P_1 P_0^{-1})^{-1} f$, т.е. $u = P_0^{-1} (E + P_1 P_0^{-1})^{-1} f$.

Отсюда получаем

$$\|u\|_{W_2^5(R;H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(R;H)}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж.-Л. Лионс, Э.Мадженес. Неоднородные граничные задачи и их приложения Издательство. «Мир», Москва 1971, 361 с.
2. Мирзоев С.С. Об условиях корректной разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений. ДАН СССР, 1983, Т.273, №2, с.282-295
3. Алиев А.Р. О разрешимости краевой задачи для операторно – дифференциальных уравнений третьего порядка с разрывным коэффициентом. // Труды ИММ АН Азерб., Т.7(15), 1997, с. 18-25
4. Mamedov A.M. On correct solvability of one class of third order operator-diferential equations on the whole of axis // Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics, XXIV (XXXII), Baku, 2006, Elm, pp. 139-146.

XÜLASƏ

Ə.Məmmədov

Bir sinif beş tərtibli operator-diferensial tənliyin bütün oxda requlyar həll olunması haqda

İşdə bütün oxda kəsilən əmsallı və baş hissəsində normal operator saxlayan bir sinif beş tərtibli operator-diferensial tənliyin requlyar həll olunmasını təmin edən şərtlər alınmışdır. Bu şərtlər operator əmsallarının xassələrilə ifadə olunmuşdur.

ABSTRACT

A.Mamedov

On regular solvability of one class of fifth order operator-differential equations on the whole of axis

In the paper, we obtain regular solvability conditions of a class of operator-differential equations of fifth order with a discontinuous coefficient on the axis, and the principal part of operator-differential equations contain a normal operator. The found conditions are expressed by the properties of the operator coefficients.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə çapa tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

Məqaləni çapa təqdim etdi: *Fizika üzrə fəlsəfə doktoru, dosent F.Qocayev*

RÖVŞƏN HƏSƏNOV
Naxçıvan Dövlət Universiteti

UOT: 372.8:52.

**“VEKTOR FƏZALAR” BÖLMƏSİNİN TƏDRİSİNDƏ RİYAZİ TƏKLİFLƏRİN
ADLANDIRILMASI**

Açar sözlər: *vektor fəza, fəndaxili əlaqə, adlandırılma, riyazi təklif, sonlu ölçülü fəza*

Key words: *vektor spase, intersubjective relations, name, matematikal proposal, finite-dimen sional space*

Ключевые слова: *векторное пространство, внутрипредметное связь, наименование, математическая предложения, конечномерное пространство*

Ali məktəblərdə riyaziyyatın, o cümlədən cəbrin tədrisində əsas məqsəd tələbələrə dərin və sistemləşdirilmiş elmi biliklər verməkdən ibarətdir. Bu məqsədə çatmaq üçün tədris olunan kursun materiallarının ayrı-ayrı mövzuları bir-biri ilə məntiqi surətdə bağlanmalı, tələbələrə ardıcıl və sistemli şəkildə vahid, tam olaraq çatdırılmalıdır. Bu işi həyata keçirmək üçün fəndaxili əlaqələrin yaradılması və möhkəmləndirilməsi xüsusi əhəmiyyət daşıyır.

Cəbr kursunda fəndaxili əlaqələrin yaradılmasının metodik tərzləri (priyomları) təlimdə daşdığı rol və əhəmiyyətinə görə maraq kəsb edir. Son dövrlər təhsil islahatları ilə bağlı olaraq cəbr kursunun məzmununun dəyişməsi və yenilməsi genişlənilib yeni məzmun alması ilə əlaqədar olaraq bu məsələ xüsusi aktuallığa malik olmuşdur. Təhsil islahatları paradiqmasına nəzər saldıqda müəyyən edilir ki, müxtəlif vaxtlarda ayrı-ayrı fənn şəklində təlimi həyata keçirilən ali cəbri ədələr nəzəriyyəsi, ədədi sistemlər, xətti cəbr fənləri tədris planlarından çıxarılmış, onların elementlərinin indiki tədris planında cəbr kursunda tədris olunmağı nəzərdə tutulmuşdur. Bundan əlavə mücərrəd cəbrin qrup və halqa kimi elementləri əvvəllər cəbr kursunun, əsasən axırında verilib, mücərrəd cəbrin predmeti haqqında təsəvvür yaradırdısa, indi mücərrəd cəbr elementləri kursun əvvəlində verilir, cəbr kursunun təməlini təşkil edir. Nəticədə cəbr kursuna yeni baxış yaranır, belə ki, cəbr kursunu ayrı-ayrı bölmələrin birləşməsi şəklində yox vahid, bütöv əlaqəli şəkildə şərh etmək zərurəti meydana çıxır. Bu isə indiki cəbr kursunda fəndaxili əlaqələrin yaradılmasını daha da aktuallaşdırır.

Fəndaxili əlaqələrin yaradılmasının bir sıra yollarını göstərək, [4,5.6]:

- 1) çoxluqlar nəzəriyyəsi dili və simvollarından istifadə edilməsi;
- 2) struktur sxemlərin vasitəsi ilə fəndaxili əlaqələrin yaradılması;
- 3) mühazirələrdə riyazi təkliflərin adlandırılması və nömrələnməsi;
- 4) bir anlayışın müxtəlif terminlərlə ifadə edilməsinə yol verilməsi və eyni bir terminin müxtəlif mənalarda işlədilməsi ilə yaranan anlaşılmazlıqların aradan qaldırılması;
- 5) mühazirə və parktik məşğələlərdə öyrənilən mövzular arasında əlaqələrin gücləndirilməsi;
- 6) müxtəlif tip təkrarlamalardan istifadə edilməsi;
- 7) ayrı-ayrı riyazi anlayışların və nəzəriyyələrin bütöv kursda yerinin və əhəmiyyətinin göstərilməsi (preambula yaratmaq-giriş hissə, nəzəriyyənin tətbiqini göstərmək, elmə gətirdiyi yenilik, onların yaratdığı istiqamət və i.a.);
- 8) yekun, icmal mühazirələrin tərtibi.

Qeyd etmək lazımdır ki, cəbrin müxtəlif bölmələrində müxtəlif fəndaxili əlaqə yaradılma yollarına üstünlük verilir. Məsələn, mücərrəd cəbr elementlərinin tədrisi zamanı çoxlu yeni anlayışlar verilir. Belə ki, onlar bir-biri ilə üzvi surətdə bağlı olurlar. Bu zaman struktur sxemlərdən

istifadə etməklə mücərrəd (ümumi) cəbrin elementləri arasında əlaqələrin göstərilməsi səmərəli olur [4]. Cəbrin tətbiqinə görə ən əhəmiyyətli bölməsi olan xətti cəbri öyrənərkən riyazi təkliflərin adlandırılması və nömrələnməsi ilə fəndaxili əlaqələrin yaradılmasına üstünlük verilir.

Bunun səbəbi öyrənilən bölmələrin strukturu ilə bağlıdır.

“Vektor fəzalar” və “Xətti inikaslar və operatorlar” xətti cəbr hissəsinin əsas fəsiləridir. Bu mövzulara qədər xətti tənliklər sisteminin həllini ciddi riyazi formada şərh etmək, matris və determinantlar nəzəriyyəsinin elementlərini tədqiq etmək üçün n -ölçülü hesabi vektor fəzalar öyrənilir. Verilmiş F meydanı üzərində n uzunluqlu kortejə n -ölçülü hesabi vektor deyilir.

Belə vektorlar çoxluğunda bərabərlik münasibəti, toplama əməli və həmin çoxluğun elementlərinin F -in elementlərinə (skalyara) vurma əməli verilir (təyin edilir).

Yeni cəbri struktur yaradılır: $\langle F^n, +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in F\} \rangle$. Burada F^n qeyd etdiyimiz vektorlar çoxluğudur və $\lambda \in F$. Təyin etdiyimiz cəbri struktur n -ölçülü hesabi vektorlar fəzasıdır.

n -ölçülü hesabi vektorlar fəzasında baş əməllərin xassələri haqqında teorem isbat edilir.

Sonralar “Vektor fəzaları” öyrənərkən məhz bu xassələrə malik olan əməllər, çoxluq ilə birlikdə vektor fəza adlanır.

Təbiidir ki, hesabi vektor fəza üçün doğru olan bir sıra təkliflər vektor fəza üçün doğru olur. Bu təkliflər arasında əlaqəni göstərmək məqsədi ilə təkliflərin adlandırılması fəndaxili əlaqəni gücləndirir və mənimsəməyə əhəmiyyətli təsir edir.

Xətti cəbrdə riyazi təkliflərin adlandırılması ilə fəndaxili əlaqələrin möhkəmləndirilməsinə üstünlük verilməsi aşağıdakı amillərlə bağlıdır.

1) Eyni bir xassə bir neçə obyektə aid edilə bilər. Məsələn, $V = L \oplus L^\perp$ xassəsi həm vektor fəzaya, həm də Evklid fəzasına aid edilir. Bu xassəsinin adlandırılması, həmin xassənin iki dəfə, hər dəfə müxtəlif obyektlərə aid olduğunu göstərməklə fəndaxili əlaqəni artırır.

2) Riyazi təklifin adlandırılması zamanı, riyazi təklifin əsas mahiyyətini qabarıq əks etdirən əsas cəhət qıscaca göstərilir. Bu riyazi təklifdə digər şərtləri axtarılmasına tələbəni sövq edir.

3) Xətti cəbrin tədrisində konsentrizimi tətbiq etməyə şərait yaradan elementlərin çox olmasıdır. Məsələn, bazisə tamamlama, ortoqonal bazisə tamamlama, ortonormal bazisə tamamlama prosedurları oxşardır və s.

4) Simvolik yazılışla verilmiş bir sıra riyazi təkliflərin təbii dildə deyilməsinə və nəticə də məzmunlu mənimsənilməsinə təkan verir.

Təqdim olunan məqalədə “Vektor fəzalar” bölməsində riyazi təkliflərin adlandırılması və nömrələnməsi həyata keçirilmişdir.

Vektor fəza anlayışını verməzdən əvvəl onun bir növü olan hesabi vektor fəza anlayışının daxil edilməsi və bununla bağlı olan bir sıra elementlərin öyrənilməsi metodik cəhətdən məqsədəuyğundur:

1) hesabi vektor fəzanın öyrənilməsi sonra vektor fəzanın öyrənilməsində aparılmış ümumiləşmələrin məqsədini və mahiyyətini anlamağa kömək edir;

2) hesabi vektor anlayışının daxil edilməsi ilə cəbr kursunun əsas istiqamətlərindən biri, xətti tənliklər sisteminin həlli məsələsinin tədqiqinə imkan yaranır. Xətti tənliklər sisteminin öyrənilməsində təbii olaraq matrislər nəzəriyyəsinin öyrənilməsi zərurəti yaranır. Bütün bunlar isə xətti cəbrin sonrakı bölmələrinin öyrənilməsində lazımı qədər nümunələrdən istifadə etməyə səbəb olur.

Qeyd etdiyimiz kimi hesabi vektor fəzaların elementlərinin tədrisində riyazi təkliflərin adlandırılması xətti cəbrin sonrakı bəhslərində çox əhəmiyyətlidir. [1]-də verilmiş tədris materialının öyrənilməsi ilə bağlı olan təkliflərimizi veriririk.

F meydanı üzərində hesabi n -ölçülü vektor fəza $F^n = \langle F^n, +, \{\omega \mid \omega \in F\} \rangle$ cəbri strukturu kimi təyin olunduqdan sonra F^n vektor fəzanın baş əməllərinin xassələri haqda [1,5.1.1] teoremi isbat edilir. Qeyd edək ki, gələcəkdə həmin xassələri ödəyən cəbri struktur vektor fəza adlandırılır. Həmin teoremi “Hesabi n – ölçülü vektor fəzanın baş əməllərinin əsas xassələri haqqında teorem” adlandırmaq sərfəlidir.

Vektorlar sisteminin xətti asılılığı və xətti asılı olmazlığı, ekvivalent vektorlar sistemləri, sonlu vektorlar sisteminin bazisi və ranqı mövzularında ifadə və isbat olunan riyazi təkliflərin

hesabi vektorları üçün nəzərdə tutulduğu aydındır. Çünki, hələlik tək cə hesabi vektor anlayışı verilmişdir. Lakin bu riyazi təkliflərin heç birində “hesabi vektor” sözü işlədilmir, “vektor” sözü işlədilir. Belə deyiliş sonralar “vektor fəza” anlayışı verildikdən sonra həmin riyazi təkliflərin və isbat prosedurlarının vektor fəza elementlərinə heç bir düzəliş edilmədən aid edilməsinə qərar verməyə imkan verir.

Vektorlar sistemlərinin xətti asılılığının və xətti asılı olmazlığının xassələrini nəzərdən keçirək. Bu xassələri öyrəndikdə, xassələri tək cə nömrələməklə kifayətlənmək olar. Belə yanaşmanın üstünlüyü ondadır ki, xətti cəbrdə xassələri verilən anlayışlar və xassələrin sayı az olduğundan, xassələrin nömrələnmə ilə verilməsi, məlumatların bütöv şəkildə mənimsənilməsinə təkan verir. 2-ci xassəni “xətti asılılığın əlamətlik münasibəti olması” ondan alınan nəticəni “xətti asılı olmazlığın irsilik münasibəti olması” xassəsi adlandırmaq yaxşı olar [1,5.1.2] teoreminin vektorlar sisteminin xətti asılılığı haqda əsas teorem adlandırmaq düzgün olardı. Çünki, bu teoremdən üçü mühüm nəticə alınır. Həmin nəticələri nömrələməklə adlandırmaq düzgün olardı.

İki vektorlar sistemlərinin bəzi xassələri teoremlərdə ifadə edilmişdir.

[1, 5. 1.6] teoremini iki VS -in ekvivalentliliyinin zəruri və kafi şərti, [1,5.1.7] teoremini ekvivalent VS -də vektorların sayı haqqında teorem adlandırmaq münasibdir. [1,5.1.8] teoremini qısa şəkildə adlandırmaq mümkün deyildir. Ona aşağıdakı şəkildə istinad edirik. Məlumdur ki, elementar çevirənlər nəticəsində sonlu VS özünə ekvivalent VS -ə çevrilir. Yəni, teoremin əsas məğzi ifadə edilir.

Sonlu vektorlar sistemini bazisinin tərfi verildikdən sonra öyrənilən [1,5.1.9] teoremini “Sonlu vektorlar sisteminin bazisinin varlığı haqqında teorem” adlandırmaq olar.

Sonlu VS -in rənginin bəzi xassələrini ifadə edən beş təklif verilmişdir [1, səh 183]. Bu təkliflərin üçü [1,5.1.10] teoremindən birbaşa alınır. Ona görə də həmin teoremi VS -in rəngi haqqında əsas teorem adlandırmaq düzgün olardı.

1-ci təklifi – alt sistemin rənginin sistemin rəngini aşmaması haqqında təklif;

2-ci təklifi – ekvivalent VS -lərinin rənglərinin bərabərliyi haqqında təklif;

3-cü təklifi – n – ölçülü hesabi vektor fəzasında sonlu VS -in rənginin n -dən böyük olmaması haqqında təklif adlandırmaq məqsədəuyğundur.

Vektor fəzanın altfəzasının üç xassəsi verilir. Onları adlandırmaq maraqlıdır, belə ki, [1,7.2.1], [1,7.2.2] və [1,7.2.3] xassələri uyğun olaraq vektor fəzanın alt fəzalarının irsilik, tranzitivlik və kəsişmələrin irsilik xassələri adlandırılabilir.

Alt fəzaların düz cəmi ilə əlaqədar olaraq verilən [1,7.2.1] və [1,7.2.2] teoremləri uyğun olaraq iki və n sayda alt fəzaların cəminin düz cəm olması üçün zəruri və kafi şərt adlandırmaq məqsədəuyğundur.

Mühazirədə altfəzaların üç xassəsi verilir. [1,7.2.4], [1,7.2.5] xassələri alt fəzaların cəminin kommutativlik və assosiativlik xassələridir.

Vektor fəzanın bazisi və ölçüsü ilə əlaqədar olaraq verilən riyazi təklifləri aşağıdakı kimi əlaqələndirmək olar.

[1,7.3.1] teoremi sonlu ölçülü vektor fəzanın bazisinin varlığı haqqında teorem adlandırmaq olar. Sonlu ölçülü vektor fəzanın bazisi yeganə deyildir. Lakin eyni bir fəzanın bazisindəki vektorların sayı bərabərdir. Ona görə də [1,7.3.2] teoremini fəzanın müxtəlif bazislərindəki elementlərinin sayı haqqında teorem adlandırmaq olar.

[1,7.3.3] nəticəsinə n – ölçülü fəzada n -dən çox sayda vektorlar sisteminin xətti asılılığı haqda nəticə adlandırmaq məqsədə uyğundur.

[1,7.3.5] teoremi fəzanın altfəzasının bazisindəki elementlərinin sayı haqqında teorem adlandırılabilir. [1,7.3.6] teoremi xətti asılı olmayan VS -in bazisə tamamlanması teoremi adlandırılır.

Vektor fəzanın ölçüsünün dörd xassəsi öyrənilir. Bu xassələri adlandırmaq da olar. Belə ki, 2-ci xassə altfəzanın ölçüsü haqda. 3-cü xassə altfəzanın fəza ilə üst-üstə düşməsinin kafi şərt, 4-cü xassə düz cəmin ölçüsü haqda xassə adlandırılabilir, [1, səh 261]. [1,7.3.10] teoremi isə Qrassman düsturu adlandırılır.

“Vektor fəzaların izomorfizimləri” mövzusunda teoremlərin və izomorfizimin xassələrinin

hamısını adlandırmaq çətinlik törətmir.

[1,7.4.1] teoremi- vektorun bazisə nəzərən ayrılışı teoremi, [1,7.4.2] teoremi n -ölçülü vektor fəzanın uyğun hesabi vektor fəzaya izomorfluğu haqqında teorem, [1,7.4.3] fəzanın hər bir vektoruna onun bazisə nəzərən koordinat sətirini qarşı qoyan inikasin izomorfizm olması haqqında teorem, [1,7.4.4] nəticəsi- fəzanın vektorlar sisteminin xətti asılı olmasının zəruri və kafi şərti, [1,7.4.5] nəticəsi V fəzasının vektorlar sistemlərinin rənginin onların koordinat sətirlərindən düzəldilmiş matrisin rənginə bərabər olması haqda nəticə adlandırılır.

Vektor fəzaların izomorfizmlərin dörd xassəsi öyrənilir. 1-ci xassə-izomorfizmlərin kompozisiyasının izomorfizm olması xassəsi, 2-ci xassə izomorfizmin simmetriklilik xassəsi. 3-cü xassə izomorfizmin tranzitivlik xassəsidir, 4-cü xassə-izomorfizmin bazisi bazisə çevirmək xassəsi adlandırılabilir.

Nəhayət tədqiq edilən mövzuda [1,7.4.6] teoremi iki fəzanın izomorf olmasının zəruri və kafi şərti adlandırılır.

Skalyar vurmali vektor fəzaları və evklid fəzalarına aid mühazirə materialında riyazi təkliflərin adlandırılması təbii olaraq meydana çıxır.

[1,7.5.1] təklifi ixtiyari vektorla sıfır vektorun skalyar hasilini sıfır vektor olması haqqında təklif, [1,7.5.2] teoremi ortoqonal vektorlar sisteminin xətti asılı olmadığı haqqında teorem, [1,7.5.3] nəticəsi n -ölçülü vektor fəzada ortoqonal bazisə nümunə haqqında nəticə, [1,7.5.4] ortoqonal bazisə tamamlama haqqında teorem adlandırılır.

Altfəzanın ortoqonal tamamlayıcı ilə bağlı olan verilən iki teorem belə adlandırılabilir: [1,7.5.6] – fəzanın altfəzası ilə onun ortoqonal tamamlayıcısının düz cəmi olması haqqında teorem; [1,7.5.1] ortoqonal tamamlamanın involyutivlik xassəsi haqqında teorem.

“Evklid vektor fəzaları” mövzusunda verilən riyazi təkliflər asanlıqla adlandırılır.

[1,7.6.1] hesabi fəzanın evklid fəzası olması haqda teorem, [1,7.6.2] –normanın əsas xassələri haqqında teorem. [1,7.6.3]-evklid fəzasının ortonormal bazisə malik olması haqqında teorem adlandırılır.

Ortonormal bazisin beş xassəsi verilir. Onların adlandırılması metodik baxımdan sərfəlidir.

1-ci xassə - n -ölçülü evklid fəzasında n sayda ortonormal sistemin ortonormal bazis olması xassəsi,

2-ci xassə -ortonormal bazisə tamamlanma xassəsi;

3-cü xassə- qeyd olunan ortonormal bazisi evklid fəzasında skalyar hasilin ifadəsi haqqında xassə;

4-cü xassə vektorun koordinatlarının onun proyeksiyaları olması haqda xassə;

5-ci xassə- evklid fəzasının özünün altfəzası ilə onun ortoqonal tamamlayıcısının düz cəmi olması haqqında xassə adlandırılabilir.

Evklid fəzalarının izomorfizmləri haqda [1,7.6.6] xassə-izomorfizm münasibətinin ekvivalentlilik münasibəti olması xassəsi, [1,7.6.7]- isə izomorfizmin ortonormal bazisi ortonormal bazisə çevirməsi xassəsi adlanır.

[1,7.6.4] teoremi istənilən evklid fəzasını standart evklid fəzasına izomorfluğu haqda teorem, [1,7.6.4] iki evklid fəzasının izomorfluğunun zəruri və kafi şərti adlandırılır.

ƏDƏBİYYAT

1. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел: Учеб. пособие для педагогических институтов.- М: Высш. школа, 1979, 559 с.
2. Варпаховский Ф.Л., Слодовников А.С. Алгебра, М.: Просвещение, 1984, 160 с.
3. Гасанов Р.А. Пути создания внутрипредметных связей. //Наука и школа, №:1, 2013, 4 стр.
4. Вахışəliyev Y.R., Əbdülkərimli L.Ş. Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi kursu, Bakı, Nurlan, 2008, 560 s.
5. Həsənov R.Ə. Cəbrin tədrisində sxemlərdən istifadə təcrübəsinə, //ADPU Xəbərləri, № 2, 2010, 5 səh.
6. Həsənov R.Ə. Fəndaxili əlaqələrin yaradılması təcrübəsindən. //NMİ xəbərləri, №3, 2010, 4 s.
- 7.

РЕЗЮМЕ

Р.Гасанов

Наименование математических предложений в разделе «Векторные пространства»

В результате реформ, проводимых в высших педагогических школах, привели к серьезным изменениям в учебных планах и программах. В связи с этим актуализированы методы создания и укрепления межпредметных связей в математических дисциплинах, в том числе в курсе алгебры. Представленная статья посвящена изучению методов создания и укрепления межпредметных связей в курсе алгебры, преподаваемой в математических специальностях. В линейной алгебре наименование математических предложений является из основных методов создания межпредметных связей. Указаны факторы, увеличивающие преимущества отмечанного метода (отражение основную сущность математических предложений, возможность применения концентризма в процессе обучения, служение содержательному усвоению учебных материалов и т.д). В работе с целью указания сущности и практических значений отмечаного метода, реализованы наименование математических п предложений в разделе «Векторные пространства »

ABSTRACT

R.Hasanov

Naming and numbering of the mathematical proposals in teaching units of vector spaces

The article deals with the renewal and educational plans and programmes related to reforms carried out in higher pedagogical schools and consequently research ways and methods of creating intersubjective relations. It attaches great importance to the study of subjects, as well as algebra course. The presented article focuses on teaching of vector space which is one of the main chapters of algebra course and studies the ways of naming and numbering of the mathematical proposals creating to the rule of the way (applying of the teaching and centrum, the same property belongs to several mathematical objects, the essence of the mathematical proposals to briefly reflect, using of the formal recording as content) have been shown. The main mathematical proposal of the “vector spaces” has been called.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə
çapa tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

Məqaləni çapa təqdim etdi: *Fizika üzrə fəlsəfə doktoru,*
dosent F.Qocayev

YAGUB MAMMADOV

Nakhchivan Teacher-Training Institute

E-mail: yagubmammadov@yahoo.com

SAMİRA HASANLİ

Nakhchivan State University

UOT 517.51

ON THE BOUNDEDNESS OF DUNKL-TYPE MAXIMAL FUNCTION IN THE GENERALIZED DUNKL-TYPE MORREY SPACES

Açar sözlər: *Dankl tipli maksimal funksiya, Dankl tipli ümumiləşmiş Mori fəzası, ümumiləşmiş sürüşmə operatoru, zəif Mori fəzası, Dankl nüvəsi*

Key words: *Dunkl-type maximal function, generalized Dunkl-type Morrey space, generalized shift operator, weak Morrey space, Dunkl kernel*

Ключевые слова: *максимальная функция, обобщенное пространство Морри типа Данкля, оператор обобщенного сдвига, слабое пространство Морри, ядро Данкля*
2000. *Mathematics Subject Classification: Primary 42B20, 42B25, 42B35*

Introduction

The Hardy–Littlewood maximal function, fractional maximal function and fractional integrals are important technical tools in harmonic analysis, theory of functions and partial differential equations. On the real line, the Dunkl operators are differential-difference operators associated with the reflection group Z_2 on \mathbb{R} :

$$\Lambda_\alpha(f)(x) = (d/dx)f(x) + ((2\alpha + 1)/x)((f(x) - f(-x))/2), \quad \alpha > -1/2.$$

In the works [1, 9, 15, 26] the maximal operator associated with the Dunkl operator on \mathbb{R} were studied. We obtain the boundedness of the Dunkl-type maximal operator from the spaces $M_{p,\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ to the spaces $M_{p,\omega,\alpha}(\mathbb{R})$, $1 < p < q < \infty$, and from the spaces $M_{1,\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ to the weak spaces $WM_{1,\omega,\alpha}(\mathbb{R})$.

For $x \in \mathbb{R}^n$ and $r > 0$, let $B(x, r)$ denote the open ball centered at x of radius r .

Let $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$. The maximal operator M is defined by

$$Mf(x) = \sup_{t>0} |B(x,t)|^{-1} \int_{B(x,t)} |f(y)| dy,$$

where $|B(x,t)|$ is the Lebesgue measure of the ball $B(x,t)$.

In the theory of partial differential equations Morrey spaces $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ play an important role. They were introduced by C. Morrey in 1938 [19] and defined as follows: For $0 \leq \lambda \leq n$, $1 \leq p < \infty$, $f \in M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ if $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ and

$$\|f\|_{M_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty.$$

If $\lambda = 0$, then $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$, if $\lambda = n$, then $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n)$, if $\lambda < 0$ or $\lambda > n$, then $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \Theta$, where Θ is the set of all functions equivalent to 0 on \mathbb{R}^n .

These spaces appeared to be quite useful in the study of the local behaviour of the solutions

to elliptic partial differential equations, apriori estimates and other topics in the theory of partial differential equations.

Also by $WM_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ we denote the weak Morrey space of all functions $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ for which

$$\|f\|_{WM_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{WM_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{WL_p(B(x,r))} < \infty,$$

where $WL_p(\mathbb{R}^n)$ denotes the weak L_p -space.

F. Chiarenza and M. Frasca [4] studied the boundedness of the maximal operator M in Morrey spaces $M_{p,\lambda}$.

1. Definitions, notation and preliminaries

Let $\alpha > -1/2$ be a fixed number and μ_α be the weighted Lebesgue measure on \mathbb{R} , given by

$$d\mu_\alpha(x) := (2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1))^{-1} |x|^{2\alpha+1} dx.$$

For every $1 \leq p \leq \infty$, we denote by $L_{p,\alpha}(\mathbb{R}) = L_p(\mathbb{R}, d\mu_\alpha)$ the spaces of complex-valued functions f , measurable on \mathbb{R} such that

$$\|f\|_{p,\alpha} \equiv \|f\|_{L_{p,\alpha}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p d\mu_\alpha(x) \right)^{1/p} < \infty \text{ if } p \in [1, \infty),$$

and

$$\|f\|_{\infty,\alpha} \equiv \|f\|_{L_\infty} = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \text{ if } p = \infty.$$

For $1 \leq p < \infty$ we denote by $WL_{p,\alpha}(\mathbb{R})$, the weak $L_{p,\alpha}(\mathbb{R})$ spaces defined as the set of locally integrable functions f with the finite norm

$$\|f\|_{WL_{p,\alpha}} = \sup_{r > 0} r (\mu_\alpha \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > r\})^{1/p}.$$

Note that

$$L_{p,\alpha} \subset WL_{p,\alpha} \text{ and } \|f\|_{WL_{p,\alpha}} \leq \|f\|_{p,\alpha} \text{ for all } f \in L_{p,\alpha}(\mathbb{R}).$$

Let $B(x,t) = \{y \in \mathbb{R} : |y| \in]\max\{0, |x| - t\}, |x| + t[\}$ and $B_t \equiv B(0,t) =]-t, t[$, $t > 0$. Then

$$\mu_\alpha B_t = b_\alpha t^{2\alpha+2},$$

where $b_\alpha = [2^{\alpha+1}(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)]^{-1}$.

We denote by $BMO_\alpha(\mathbb{R})$ (Dunkl-type BMO space) the set of locally integrable functions f with finite norm (see [7])

$$\|f\|_{*,\alpha} = \sup_{r > 0, x \in \mathbb{R}} \frac{1}{\mu_\alpha B_r} \int_{B_r} |\tau_x f(y) - f_{B_r}(x)| d\mu_\alpha(y) < \infty,$$

where

$$f_{B_r}(x) = \frac{1}{\mu_\alpha B_r} \int_{B_r} \tau_x f(y) d\mu_\alpha(y).$$

For all $x, y, z \in \mathbb{R}$, we put

$$W_\alpha(x, y, z) = (1 - \sigma_{x,y,z} + \sigma_{z,x,y} + \sigma_{z,y,x}) \Delta_\alpha(x, y, z)$$

where

$$\sigma_{x,y,z} = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} & \text{if } x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

and Δ_α is the Bessel kernel given by

$$\Delta_\alpha(x, y, z) = \begin{cases} d_\alpha \frac{([(|x|+|y|)^2 - z^2][z^2 - (|x|-|y|)^2])^{\alpha-1/2}}{|xyz|^{2\alpha}}, & \text{if } |z| \in A_{x,y}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $d_\alpha = (\Gamma(\alpha+1))^2 / (2^{\alpha-1} \sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + \frac{1}{2}))$ and $A_{x,y} = [||x|-|y||, |x|+|y|]$.

Properties 1. (see Rösler [28]) *The signed kernel W_α is even with respect to all variables and satisfies the following properties*

$$W_\alpha(x, y, z) = W_\alpha(y, x, z) = W_\alpha(-x, z, y),$$

$$W_\alpha(x, y, z) = W_\alpha(-z, y, -x) = W_\alpha(-x, -y, -z)$$

and

$$\int_{\mathbb{R}} |W_\alpha(x, y, z)| d\mu_\alpha(z) \leq 4.$$

In the sequel we consider the signed measure $\nu_{x,y}$, on \mathbb{R} , given by

$$\nu_{x,y} = \begin{cases} W_\alpha(x, y, z) d\mu_\alpha(z) & \text{if } x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ d\delta_x(z) & \text{if } y = 0, \\ d\delta_y(z) & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Definition 1. For $x, y \in \mathbb{R}$ and f a continuous function on \mathbb{R} , we put

$$\tau_x f(y) = \int_{\mathbb{R}} f(z) d\nu_{x,y}(z).$$

The operators τ_x , $x \in \mathbb{R}$, are called Dunkl translation operators on \mathbb{R} and it can be expressed in the following form (see [28])

$$\begin{aligned} \tau_x f(y) &= c_\alpha \int_0^\pi f_e((x, y)_\theta) h_1(x, y, \theta) (\sin \theta)^{2\alpha} d\theta \\ &\quad + c_\alpha \int_0^\pi f_o((x, y)_\theta) h_2(x, y, \theta) (\sin \theta)^{2\alpha} d\theta, \end{aligned}$$

where $(x, y)_\theta = \sqrt{x^2 + y^2 - 2|xy| \cos \theta}$, $f = f_e + f_o$, f_o and f_e being respectively the odd and the even parts of f , with

$$\begin{aligned} c_\alpha &\equiv \left(\int_0^\pi (\sin \theta)^{2\alpha} d\theta \right)^{-1} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha+1/2)}, \\ h_1(x, y, \theta) &= 1 - \operatorname{sgn}(xy) \cos \theta \end{aligned}$$

and

$$h_2(x, y, \theta) = \begin{cases} \frac{(x+y)[1 - \operatorname{sgn}(xy) \cos \theta]}{(x, y)_\theta}, & \text{if } xy \neq 0, \\ 0, & \text{if } xy = 0. \end{cases}$$

Using the change of variable $z = (x, y)_\theta$, we have also

$$\begin{aligned} \tau_x f(y) &= c_\alpha \int_0^\pi \{f((x, y)_\theta) + f(-(x, y)_\theta)\} \\ &\quad + \frac{x+y}{(x, y)_\theta} [f((x, y)_\theta) - f(-(x, y)_\theta)] (1 - \cos \theta) (\sin \theta)^{2\alpha} d\theta. \end{aligned}$$

Now we define the Dunkl-type Hardy-Littlewood maximal function by (see [1, 9, 15, 26])

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0} (\mu_\alpha B_r)^{-1} \int_{B_r} \tau_x |f|(y) d\mu_\alpha(y).$$

Theorem 1. ([1, 15, 26]) 1) If $f \in L_{1,\alpha}(\mathbb{R})$, then for every $s > 0$

$$\mu_\alpha \{x \in \mathbb{R} : M_\alpha f(x) > s\} \leq \frac{C_1}{s} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu_\alpha(x),$$

where $C_1 > 0$ is independent of f .

2) If $f \in L_{p,\alpha}(\mathbb{R})$, $1 < p \leq \infty$, then $M_\alpha f \in L_{p,\alpha}(\mathbb{R})$ and

$$\|M_\alpha f\|_{p,\alpha} \leq C_2 \|f\|_{p,\alpha},$$

where $C_2 > 0$ is independent of f .

Corollary 1. If $f \in L_{1,\alpha}^{loc}(\mathbb{R})$, then

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu_\alpha B_r} \int_{B_r} |\tau_x f(y) - f(x)| d\mu_\alpha(y) = 0$$

for a. e. $x \in \mathbb{R}$.

Corollary 2. If $f \in L_{1,\alpha}^{loc}(\mathbb{R})$, then

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu_\alpha B_r} \int_{B_r} \tau_x f(y) d\mu_\alpha(y) = f(x)$$

for a. e. $x \in \mathbb{R}$.

For $1 \leq p, \theta \leq \infty$ and $0 < s < 1$, the Besov space for the Dunkl operators on \mathbb{R} (Besov-Dunkl space) $B_{p\theta,\alpha}^s(\mathbb{R})$ consists of all functions f in $L_{p,\alpha}(\mathbb{R})$ so that

$$\|f\|_{B_{p\theta,\alpha}^s} = \|f\|_{p,\alpha} + \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\|\tau_x f(\cdot) - f(\cdot)\|_{p,\alpha}^\theta}{|x|^{2\alpha+2+s\theta}} d\mu_\alpha(x) \right)^{1/\theta} < \infty. \quad (1)$$

Besov spaces in the setting of the Dunkl operators studied by C. Abdelkefi and M. Sifi [2], R. Bouguila and Y.Y. Mammadov [16]. In the following theorem we prove the boundedness of the Dunkl-type fractional integral operator $I_{\beta,\alpha}$ in the Dunkl-type Besov spaces.

Definition 2. Let $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq Q$. We denote by $M_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ Dunkl-type Morrey space ($\equiv D$ -Morrey space) as the set of locally integrable functions $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, with the finite norm

$$\|f\|_{M_{p,\lambda,\alpha}} = \sup_{t>0, x \in \mathbb{R}} \left(t^{-\lambda} \int_{B_t} [\tau_x |f(y)|]^p d\mu_\alpha(y) \right)^{1/p}.$$

Theorem 2. [11] 1. If $f \in M_{1,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$, $0 \leq \lambda < 2\alpha + 2$, then $M_\alpha f \in WM_{1,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ and

$$\|M_\alpha f\|_{WM_{1,\lambda,\alpha}} \leq C_{1,\lambda,\alpha} \|f\|_{M_{1,\lambda,\alpha}},$$

where $C_{1,\lambda,\alpha}$ depends only on λ, α and n .

2. If $f \in M_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < 2\alpha + 2$, then $M_\alpha f \in M_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ and

$$\|M_\alpha f\|_{M_{p,\lambda,\alpha}} \leq C_{p,\lambda,\alpha} \|f\|_{M_{p,\lambda,\alpha}},$$

where $C_{p,\lambda,\alpha}$ depends only on p, λ, α and n .

For a real parameter $\alpha \geq -1/2$, we consider the Dunkl operator, associated with the reflection group Z_2 on \mathbb{R} :

$$\Lambda_\alpha(f)(x) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{2\alpha+1}{x} \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad (2)$$

Note that $\Lambda_{-1/2} = d/dx$.

For $\alpha \geq -1/2$ and $\lambda \in \mathbf{C}$, the initial value problem:

$$\Lambda_\alpha(f)(x) = \lambda f(x), \quad f(0) = 1, \quad x \in \mathbf{R}$$

has a unique solution $E_\alpha(\lambda x)$ called Dunkl kernel [5, 24, 29] and given by

$$E_\alpha(\lambda x) = j_\alpha(i\lambda x) + \frac{\lambda x}{2(\alpha+1)} j_{\alpha+1}(i\lambda x), \quad x \in \mathbf{R},$$

where j_α is the normalized Bessel function of the first kind and order α [30], defined by

$$j_\alpha(z) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) \frac{J_\alpha(z)}{z^\alpha} = \Gamma(\alpha+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{2n}}{n! \alpha(n+\alpha+1)}, \quad z \in \mathbf{C}.$$

We can write for $x \in \mathbf{R}$ and $\lambda \in \mathbf{C}$ (see Rösler [28], p. 295)

$$E_\alpha(-i\lambda x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha+1/2)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\alpha-1/2} (1-t) e^{i\lambda x t} dt.$$

Note that $E_{-1/2}(\lambda x) = e^{\lambda x}$.

The Dunkl transform F_α of a function $f \in L_{1,\alpha}(\mathbf{R})$, is given by

$$F_\alpha f(\lambda) := \int_{\mathbf{R}} E_\alpha(-i\lambda x) f(x) d\mu_\alpha(x), \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Here the integral makes sense since $|E_\alpha(ix)| \leq 1$ for every $x \in \mathbf{R}$ [28], p. 295.

Note that $F_{-1/2}$ agrees with the classical Fourier transform F , given by:

$$Ff(\lambda) := (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} e^{-i\lambda x} f(x) dx, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Proposition 1. (see Soltani [25]) (i) If f is an even positive continuous function, then $\tau_x f$ is positive.

(ii) For all $x \in \mathbf{R}$ the operator τ_x extends to $L_{p,\alpha}(\mathbf{R})$, $p \geq 1$ and we have for $f \in L_{p,\alpha}(\mathbf{R})$,

$$\|\tau_x f\|_{p,\alpha} \leq 4 \|f\|_{p,\alpha}. \quad (3)$$

(iii) For all $x, \lambda \in \mathbf{R}$ and $f \in L_{1,\alpha}(\mathbf{R})$, we have

$$F_\alpha(\tau_x f)(\lambda) = E_\alpha(i\lambda x) F_\alpha f(\lambda).$$

Let f and g be two continuous functions on \mathbf{R} with compact support. We define the generalized convolution $*_\alpha$ of f and g by

$$f *_\alpha g(x) := \int_{\mathbf{R}} \tau_x f(-y) g(y) d\mu_\alpha(y), \quad x \in \mathbf{R}.$$

The generalized convolution $*_\alpha$ is associative and commutative [28]. Note that $*_{-1/2}$ agrees with the standard convolution $*$.

Proposition 2. (see Soltani [25]) (i) If f is an even positive function and g a positive function with compact support, then $f *_\alpha g$ is positive.

(ii) Assume that $p, q, r \in [1, +\infty[$ satisfying $1/p + 1/q = 1 + 1/r$ (the Young condition). Then the map $(f, g) \mapsto f *_\alpha g$, defined on $\mathbf{E}_c \times \mathbf{E}_c$, extends to a continuous map from $L_{p,\alpha}(\mathbf{R}) \times L_{q,\alpha}(\mathbf{R})$ to $L_{r,\alpha}(\mathbf{R})$, and we have

$$\|f *_\alpha g\|_{r,\alpha} \leq 4 \|f\|_{p,\alpha} \|g\|_{q,\alpha}.$$

(iii) For all $f \in L_{1,\alpha}(\mathbf{R})$ and $g \in L_{2,\alpha}(\mathbf{R})$, we have

$$F_\alpha(f *_\alpha g) = (F_\alpha f)(F_\alpha g).$$

Let $\omega(x, r)$ positive measurable weight function on $\mathbf{R} \times (0, \infty)$. The norm in the space $M_{p,\omega,\alpha}(\mathbf{R})$ may be introduced in two forms,

$$\|f\|_{M_{p,\omega,\alpha}} = \sup_{x \in \mathbb{R}, t > 0} \frac{t^{\frac{2\alpha+2}{p}}}{\omega(x,t)} \|\tau_x |f|\|_{L_{p,\alpha}(B_t)}.$$

If $\omega(x,t) \equiv r^{\frac{2\alpha+2}{p}}$ then $M_{p,\omega,\alpha}(\mathbb{R}) \equiv L_{p,\alpha}(\mathbb{R})$, if $\omega(x,t) \equiv t^{\frac{\lambda-2\alpha+2}{p}}$, $0 \leq \lambda < 2\alpha+2$, then $M_{p,\omega,\alpha}(\mathbb{R}) \equiv M_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$.

2. The Dunkl-type maximal operator in the spaces $M_{p,\omega,\alpha}(\mathbb{R})$

Theorem 3. Let $1 \leq p < \infty$ and the $\omega(x,r)$ positive measurable weight function on $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ satisfying the condition

$$\int_r^\infty \omega(x,t) \frac{dt}{t} \leq C\omega(x,r). \quad (4)$$

Then for $p > 1$ the maximal operator M_α is bounded from $M_{p,\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ to $M_{p,\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ and for $p = 1$ the maximal operator M_α is bounded from $M_{1,\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ to $WM_{1,\omega,\alpha}(\mathbb{R})$.

Proof. The maximal function $M_\alpha f(x)$ may be interpreted as a maximal function defined on a space of homogeneous type. By this we mean a topological space X equipped with a continuous pseudometric ρ and a positive measure ν satisfying

$$\nu E(x,2r) \leq C_0 \nu E(x,r) \quad (5)$$

with a constant C_0 being independent of x and $r > 0$. Here $E(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}$, $\rho(x,y) = |x-y|$. Let (X, ρ, ν) be a space of homogeneous type, where $X = \mathbb{R}$, $\rho(x,y) = |x-y|$, $d\nu(x) = d\mu_\alpha(x)$. It is clear that this measure satisfies the doubling condition (5).

Define

$$M_\nu f(x) = \sup_{r>0} (\nu B(x,r))^{-1} \int_{B(x,r)} |f(y)| d\nu(y).$$

It is well known that the maximal operator M_ν is bounded from $L_1(X, \nu)$ to $WL_1(X, \nu)$ and is bounded on $L_p(X, \nu)$ for $1 < p < \infty$ (see [3]).

The following inequality was proved in [15]

$$M_\alpha f(x) \leq C M_\nu f(x), \quad (6)$$

where $C > 0$ is independent of f .

Using inequality (6) we have

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_r} [\tau_x (M_\alpha f(y))]^p d\mu_\alpha(y) \right)^{1/p} &= \left(\int_{\mathbb{R}} [\tau_x (M_\alpha f(y))]^p \chi_{B_r}(y) d\mu_\alpha(y) \right)^{1/p} \\ &\leq C \left(\int_Y (M_\nu f(y))^p \chi_{B(x,r)}(y) d\nu(y) \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

In [12] there was proved that the analogue of the Fefferman-Stein theorem for the maximal operator defined on a space of homogeneous type is valid, if condition (5) is satisfied. Therefore

$$\int_Y (M_\nu \varphi(y))^p \psi(y) d\nu(y) \leq C_p \int_Y |\varphi(y)|^p M_\nu \psi(y) d\nu(y). \quad (7)$$

Then taking $\varphi(y) = f(y)$ and $\psi(y) \equiv \chi_{B(x,r)}(y)$ we obtain from inequality (7) that

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_r} [\tau_x (M_\alpha f(y))]^p d\mu_\alpha(y) \right)^{1/p} &\leq C \left(\int_Y (M_\nu f(y))^p \chi_{B(x,r)}(y) d\nu(y) \right)^{1/p} \\ &\leq C_p \left(\int_Y |f(y)|^p M_\nu \chi_{B(x,r)}(y) d\nu(y) \right)^{1/p} = C_p \left(\int_{\mathbb{R}} [\tau_x |f(y)|]^p M \chi_{B_r}(y) d\mu_\alpha(y) \right)^{1/p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_p \left(\int_{B_r} [\tau_x | f(y)|]^p d\mu_\alpha(y) + C_p \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B_{2^{j+1}r} \setminus B_{2^j r}} [\tau_x | f(y)|]^p M\chi_{B_r}(y) d\mu_\alpha(y) \right)^{1/p} \\
&\leq C_p \left(\int_{p_r} [\tau_x | f(y)|]^p d\mu_\alpha(y) \right)^{1/p} + C_p \left(\sum_{j=1}^{\infty} \int_{B_{2^{j+1}r} \setminus B_{2^j r}} [\tau_x | f(y)|]^p \frac{r^{2\alpha+2}}{(|y|+r)^{2\alpha+2}} d\mu_\alpha(y) \right)^{1/p} \\
&\leq C_p \|f\|_{M_{p,\omega,\alpha}} r^{\frac{2\alpha+2}{p}} \left(\omega(x,r) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2^j+1)^{2\alpha+2}} (2^{j+1}r)^{\frac{2\alpha+2}{p}} \omega(x,2^{j+1}r) \right) \\
&\leq C_3 \|f\|_{M_{p,\omega,\alpha}} r^{\frac{2\alpha+2}{p}} \left(\omega(x,r) + C \int_r^\infty \omega(x,t) \frac{dt}{t} \right) \leq C_4 r^{\frac{2\alpha+2}{p}} \omega(x,r) \|f\|_{M_{p,\omega,\alpha}}.
\end{aligned}$$

The Theorem 3 is proved.

REFERENCES

1. Abdelkefi C. and Sifi M., *Dunkl Translation and Uncentered Maximal Operator on the Real Line*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences Volume 2007, Article ID 87808, 9 pages doi:10.1155/2007/87808
2. Abdelkefi C. and Sifi M., *On the uniform convergence of partial Dunkl integrals in Besov-Dunkl spaces*, Fractional Calculus and Applied Analysis, 9(1) (2006), 43-56.
3. Coifman R.R. and Weiss G., *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogenes*. Lecture Notes in Math., **242**, Springer-Verlag. Berlin, 1971.
4. Chiarenza F., Frasca M., *Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function*. Rend. Math. 7 (1987), 273-279.
5. Dunkl C.F., *Differential-difference operators associated with reflections groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 311 (1989), 167-183.
6. Guliyev V.S., *Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in \mathbb{R}^n* . Doctor's degree dissertation, Moscow, Mat. Inst. Steklov, 1994, 1-329. (Russian)
7. Guliyev V.S., *On maximal function and fractional integral, associated with the Bessel differential operator*. Mathematical Inequalities and Applications, (2003) **6**, 2, 317-330.
8. Guliyev V.S. and Hasanov J.J., *Necessary and sufficient conditions for the boundedness of Riesz potential associated with the Laplace-Bessel differential operator in Morrey spaces*. J. Math. Anal. Appl. **347** (2008) 113-122.
9. Guliyev V.S., Mammadov Y.Y., *Function spaces and integral operators for the Dunkl operator on the real line*, Khazar Journal of Mathematics, **2** (2006), no. 4, 17-42.
10. Guliyev V.S., Mammadov Y.Y., *On fractional maximal function and fractional integrals associated with the Dunkl operator on the real line*. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2009, v. 353, Issue 1, pp. 449-459.
11. Guliyev E.V., Eroglu A., Mammadov Y.Y., *Necessary and Sufficient Conditions for the Boundedness of Dunkl-Type Fractional Maximal Operator in the Dunkl-Type Morrey Spaces*, Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis Volume 2010, Article ID 976493, 10 pages doi:10.1155/2010/976493
12. Danielli D., *A Fefferman-Phong type inequality and applications to quasilinear subelliptic equations*. Potential Analysis, **11** (1999), 387-413.
13. V.M.Kokilashvili, A.Kufner, *Fractional integrals on spaces of homogeneous type*. Comment. Math. Univ. Carolinae 1989, **30**, No.3, 511-523.
14. Macias R.A., Segovia C., *A well behaved quasi-distance for spaces of homogeneous type*. Trab. Mat. Inst. Argent. Mat., **32** (1981) 18 p.
15. Mammadov Y.Y., *On maximal operator associated with the Dunkl operator on \mathbb{R}* , Khazar Journal of Mathematics, 2 (2006), no. 4, 59-70.

XÜLASƏ

Yaqub Məmmədov, Samirə Həsənli

Dankl tipli maksimal funksiyanın Dankl tipli ümumiləşmiş Mori fəzasında məhdudluğu haqqında

Axırıncı onilliklərdə harmonik analiz sahəsinə təsir edən əsas nailiyyətlərdən biri maksimal operatorlar və potensial tipli inteqral operatorlar nəzəriyyəsinin ideya və texnikasının müvəffəqiyyətlə cəlb olunmasından ibarətdir. Bu ideya və üsullar xüsusi törəmli diferensial tənliklər nəzəriyyəsində, funksiyalar nəzəriyyəsində, funksional analizdə, ehtimal nəzəriyyəsində, yaxılaşmalar nəzəriyyəsinin məsələlərində, harmonik analizdə bircins qruplarda və riyaziyyatın digər bölmələrində tətbiq olunur. Hardi–Littlvud maksimal funksiyası, kəsr maksimal funksiya və kəsr inteqralı harmonik analizin, funksiyalar nəzəriyyəsinin və xüsusi törəmli diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin əsas texniki vasitələrindəndir.

Məqalədə $\Lambda_\alpha(f)(x) = (d/dx)f(x) + ((2\alpha + 1)/x)((f(x) - f(-x))/2)$, $\alpha > -1/2$ Dankl diferensial-fərq operatorunun doğurduğu ümumiləşmiş sürüşmə operatoruna baxılır. Həqiqi oxda Dankl diferensial-fərq operatoru \mathbb{R} -də Z_2 refleksiv qrupu ilə bağlıdır. \mathbb{R} -də Dankl diferensial-fərq operatorunun doğurduğu maksimal funksiya C.Abdelkefi və M.Sifi, V.S.Quliyev, Y.Y.Məmmədov və F.Soltani tərəfindən öyrənilib. F.Çiarenza və M. Fraska M maksimal operatorunun $M_{p,\lambda}$ Mori fəzasında məhdudluğunu öyrənmişlər.

İşdə $1 < p < \infty$ olduqda Dankl tipli M_α Hardi–Littlvud maksimal funksiyanın Dankl tipli $M_{p,\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ ümumiləşmiş Mori fəzasından $M_{p,\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ fəzasına və $M_{1,\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ fəzasından zəif $WM_{1,\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ fəzasına məhdudluğu isbat olunmuşdur.

РЕЗЮМЕ

Ягуб Мамедов, Самира Гасанлы

Об ограниченности максимальной функции типа Данкля в обобщенных пространствах Морри типа Данкля

Одно из основных достижений последних десятилетий, повлиявших на облик гармонического анализа, состоит в успешном привлечении идей и техники теории максимальных операторов и интегральных операторов типа потенциала. Эти идеи и методы применяются в теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории функций, функциональном анализе, теории вероятностей, задачах теории приближений, гармоническом анализе на однородных группах и других разделах математики. Максимальная функция Харди-Литлвуда, дробно-максимальная функция и дробный интеграл являются основным техническим средством гармонического анализа, теории функции и теории дифференциальных уравнений с частными производными.

В статье рассматривается оператор обобщенного сдвига, порожденного дифференциально-разностным оператором Данкля $\Lambda_\alpha(f)(x) = (d/dx)f(x) + ((2\alpha + 1)/x)((f(x) - f(-x))/2)$, $\alpha > -1/2$. В действительной оси дифференциально-разностный оператор Данкля связан с рефлексивной группой Z_2 на \mathbb{R} . Максимальная функция, порожденная дифференциально - разностным оператором Данкля на \mathbb{R} изучалась С.Абделкефи и М. Сифи, В.С.Гулиевым, Я.Я.Мамедовым и Ф.Солтани. Ф.Киаренза и М.Фраска изучали ограниченность максимального оператора M в пространстве Морри $M_{p,\lambda}$.

В работе при $1 < p < \infty$ доказана ограниченность максимальной функций Харди-Литлвуда типа Данкля M_α из обобщенных пространств Морри типа Данкля $M_{p,\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ в пространство $M_{p,\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ и из пространства $M_{1,\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ в слабое пространство $WM_{1,\omega,\alpha}(\mathbb{R})$.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə çapa tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

АЛИЗАДЕ УЛВИ

Бакинский Государственный Университет

САХИБ АЛИЕВ

Нахичеванский Государственный Университет

УДК: 517.95

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ
ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**Açar sözlər:** *tərs sərhəd məsələsi, hiparbolik tənlik, Furye üsulu, klassik həll.***Key words:** *hyperbolic equation, inverse problem, integral condition of overdetermination.***Ключевые слова:** *гиперболическое уравнение, обратная задача, интегральное условие переопределения.*

Введение. Известно немало случаев, когда потребности практики приводят к задачам определения коэффициентов или правой части дифференциального уравнения по некоторым известным данным от его решения. Такие задачи получили название обратных задач математической физики. Обратные задачи представляют собой активно развивающийся раздел современной математики. Обратные задачи для уравнений с частными производными различных типов исследовались во многих работах [1–5]. В обратных задачах вместе с начальными и граничными условиями, характерными для той или иной прямой задачи, задается дополнительная информация, необходимость которой обусловлена наличием неизвестных коэффициентов или правой части уравнения. Дополнительная информация, которая называется условием переопределения, может быть представлена в различных формах.

В предлагаемой статье исследования обратная краевая задача с дополнительными интегральными условиями для гиперболического уравнения третьего порядка.

1. Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче.

Пусть $D_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$. Далее, пусть $f(x, t)$, $\varphi_i(x)$, $(i = 1, 2, 3)$, $h(t)$ - заданные функции, определенные при $x \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$. Рассмотрим следующую обратную краевую задачу: Найти пару $\{u(x, t), a(t)\}$ функций $u(x, t), a(t)$, связанных в D_T уравнением [6]:

$$u_{ttt}(x, t) - u_{ttx}(x, t) + u_{tt}(x, t) - \alpha u_{xx}(x, t) = a(t)u(x, t) + f(x, t) \quad (1)$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ начальных условий

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_{tt}(x, 0) = \varphi_2(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (2)$$

граничного условия

$$u_x(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (3)$$

а также условиям переопределения:

$$\int_0^1 u(x, t) dx = h(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (4)$$

где $0 < \alpha < 1$ – заданное число.

Обозначим

$$\tilde{C}^{(2,3)}(D_T) = \left\{ u(x, t), u_x(x, t), u_{xx}(x, t), u_t(x, t), u_{tx}(x, t), u_{ttx}(x, t), u_{tt}(x, t), u_{ttt}(x, t) \in C(D_T) \right\}.$$

Определение. Пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$ будем называть классическим решением обратной краевой задачи (1) - (4), если $u(x,t) \in \tilde{C}^{(2,3)}(D_T)$, $a(t) \in C[0,T]$ и $\{u(x,t), a(t)\}$ удовлетворяет (1)-(4) в обычном смысле.

Справедлива следующая

Лемма 1. Пусть $f(x,t) \in C(D_T)$, $\varphi(x), \psi(x) \in C[0,1]$, $h(t) \in C^2[0,T]$, $h(t) \neq 0$ при $t \in [0,T]$ и выполняются условия согласования:

$$\int_0^1 \varphi_0(x) dx = h(0), \int_0^1 \varphi_1(x) dx = h'(0), \int_0^1 \varphi_2(x) dx = h''(0). \quad (5)$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)-(4) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t) \in \tilde{C}^{(2,3)}(D_T)$, $a(t) \in C[0,T]$ из соотношений (1)-(3) и

$$a(t)h(t) + \int_0^1 f(x,t) dx = h'''(t) + h''(t) - u_{tx}(1,t) - au_x(1,t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (6)$$

Доказательство. Предположим, что $\{u(x,t), a(t)\}$ является классическим решением задачи (1)-(4). Из (4) видно, что

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 u(x,t) dx = h'(t), \quad \frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x,t) dx = h''(t), \quad \frac{d^3}{dt^3} \int_0^1 u(x,t) dx = h'''(t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (7)$$

Проинтегрируем уравнение (1) по x от 0 до 1 и учитывая условия (3) имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{d^3}{dt^3} \int_0^1 u(x,t) dx + \frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x,t) dx - u_{tx}(1,t) - au_x(1,t) = \\ & = a(t) \int_0^1 u(x,t) dx + \int_0^1 f(x,t) dx \quad (0 \leq t \leq T). \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда, с учётом (4) и (7), приходим к выполнению (6).

Пусть теперь $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1)-(3), (6). Тогда, из (6) и (8), получаем:

$$\frac{d^3}{dt^3} \left(\int_0^1 u(x,t) dx - h(t) \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\int_0^1 u(x,t) dx - h(t) \right) = a(t) \left(\int_0^1 u(x,t) dx - h(t) \right) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (9)$$

Так как $\int_0^1 \varphi_0(x) dx = h(0)$, $\int_0^1 \varphi_1(x) dx = h'(0)$, $\int_0^1 \varphi_2(x) dx = h''(0)$, то имеем:

$$\begin{cases} \int_0^1 u(x,0) dx - h(0) = \int_0^1 \varphi_0(x) dx - h(0) = 0, \\ \int_0^1 u_t(x,0) dx - h'(0) = \int_0^1 \varphi_1(x) dx - h'(0) = 0, \\ \int_0^1 u_{tt}(x,0) dx - h''(0) = \int_0^1 \varphi_2(x) dx - h''(0) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Из (9) и (10) заключаем, что выполняется условие (4). Лемма доказана.

2. Разрешимость задачи.

Первую компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)-(3), (6) будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x, \quad \lambda_k = \frac{\pi}{2}(2k-1), \quad (11)$$

где

$$u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x dx \quad (k=1,2,\dots).$$

Тогда, применяя формальную схему Фурье, из (1) и (2) имеем:

$$u_k'''(t) + u_k''(t) + \lambda_k^2 u_k'(t) + \alpha \lambda_k^2 u_k(t) = F_k(t; u, a) \quad (k=1,2,\dots; 0 \leq t \leq T), \quad (12)$$

$$u_k(0) = \varphi_{0k}, \quad u_k'(0) = \varphi_{1k}, \quad u_k''(0) = \varphi_{2k} \quad (k=1,2,\dots), \quad (13)$$

где

$$F_k(t; u, a, b) = f_k(t) + a(t)u_k(t), \quad f_k(t) = 2 \int_0^1 f(x,t) \cos \lambda_k x dx,$$

$$\varphi_{ik} = 2 \int_0^1 \varphi_i(x) \cos \lambda_k x dx \quad (i=0,1,2; k=1,2,\dots).$$

Решая задачу (12), (13), находим:

$$\begin{aligned} u_k(t) = & \frac{1}{b_k} \left\{ \left[(\gamma_k^2 + \beta_k^2) e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t} \left[\alpha_k (\alpha_k - 2\gamma_k) \cos \beta_k t + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{1}{\beta_k} (\gamma_k^3 + \alpha_k \gamma_k^2 - \alpha_k \beta_k^2 - \alpha_k^2 \gamma_k) \sin \beta_k t \right] \right] \varphi_{0k} + \right. \\ & \left. + \left[-2\gamma_k e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t} \left[2\gamma_k \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} (\alpha_k^2 + \beta_k^2 - \gamma_k^2) \sin \beta_k t \right] \right] \varphi_{1k} + \right. \\ & \left. + \left[e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t} \left[-\cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} (\gamma_k - \alpha_k) \sin \beta_k t \right] \right] \varphi_{2k} + \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) \times \right. \\ & \left. \times \left[e^{\alpha_k(t-\tau)} + e^{\gamma_k(t-\tau)} \left[\frac{\gamma_k - \alpha_k}{\beta_k} \sin \beta_k(t-\tau) - \cos \beta_k(t-\tau) \right] \right] d\tau \right\} \quad (k=1,2,\dots), \quad (14) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \alpha_{1k} + \beta_{1k} - \frac{1}{3}, \quad \beta_k = \frac{\sqrt{3}}{2} (\alpha_{1k} - \beta_{1k}), \quad \gamma_k = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} (\alpha_{1k} + \beta_{1k}), \\ b_k &= \alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 - 2\alpha_k \gamma_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{1k} &= \left\{ -\frac{1}{2} \left(\left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \lambda_k^2 + \frac{2}{27} \right) + \left[\frac{1}{4} \left(\left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \lambda_k^2 + \frac{2}{27} \right)^2 + \frac{1}{27} \left(\lambda_k^2 - \frac{1}{3} \right)^3 \right]^{1/2} \right\}^{1/3}, \\ \beta_{1k} &= \left\{ -\frac{1}{2} \left(\left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \lambda_k^2 + \frac{2}{27} \right) - \left[\frac{1}{4} \left(\left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \lambda_k^2 + \frac{2}{27} \right)^2 + \frac{1}{27} \left(\lambda_k^2 - \frac{1}{3} \right)^3 \right]^{1/2} \right\}^{1/3}. \end{aligned}$$

После подстановки выражений $u_k(t)$ ($k=1,2,\dots$) в (11), для определения компоненты $u(x,t)$ решения задачи (1)-(3), (6) получаем:

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{b_k} \left[(\gamma_k^2 + \beta_k^2) e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t} \left[\alpha_k (\alpha_k - 2\gamma_k) \cos \beta_k t + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{1}{\beta_k} (\gamma_k^3 + \alpha_k \gamma_k^2 - \alpha_k \beta_k^2 - \alpha_k^2 \gamma_k) \sin \beta_k t \right] \right] \varphi_{0k} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[-2\gamma_k e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t} \left[2\gamma_k \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} (\alpha_k^2 + \beta_k^2 - \gamma_k^2) \sin \beta_k t \right] \right] \varphi_{1k} + \\
& + \left[e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t} \left[-\cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} (\gamma_k - \alpha_k) \sin \beta_k t \right] \right] \varphi_{2k} + \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) \times \\
& \times \left[e^{\alpha_k(t-\tau)} + e^{\gamma_k(t-\tau)} \left[\frac{\gamma_k - \alpha_k}{\beta_k} \sin \beta_k(t-\tau) - \cos \beta_k(t-\tau) \right] \right] d\tau \Bigg\} \cos \lambda_k x. \tag{15}
\end{aligned}$$

Дифференцируя (14) находим:

$$\begin{aligned}
u'_k(t) = \frac{1}{b_k} & \left\{ \alpha_k (\gamma_k^2 + \beta_k^2) e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t} \left[-\alpha_k (\gamma_k^2 + \beta_k^2) \cos \beta_k t + \frac{\alpha_k}{\beta_k} (\gamma_k - \alpha_k) \times \right. \right. \\
& \times (\gamma_k^2 + \beta_k^2) \sin \beta_k t \Bigg] \varphi_{0k} + \left[-2\alpha_k \gamma_k e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t} \left[(\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2) \cos \beta_k t + \right. \right. \\
& + \frac{\gamma_k}{\beta_k} (\alpha_k^2 - \beta_k^2 - \gamma_k^2) \sin \beta_k t \Bigg] \varphi_{1k} + \left[\alpha_k e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t} \left[-\alpha_k \cos \beta_k t + \right. \right. \\
& + \frac{1}{\beta_k} (\beta_k^2 + \gamma_k^2 - \alpha_k \gamma_k) \sin \beta_k t \Bigg] \varphi_{2k} + \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) \left[\alpha_k e^{\alpha_k(t-\tau)} + e^{\gamma_k(t-\tau)} \times \right. \\
& \times \left. \left. \left[\left(\frac{\gamma_k}{\beta_k} (\gamma_k - \alpha_k) + \beta_k \right) \sin \beta_k(t-\tau) - \alpha_k \cos \beta_k(t-\tau) \right] \right] d\tau \right\} \quad (k=1,2,\dots). \tag{16}
\end{aligned}$$

Для того, чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ решения $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)-(3), (6) подставим выражение (11) в (6):

$$\begin{aligned}
a(t) = [h(t)]^{-1} & \left\{ h_1'''(t) + h_1''(t) - \int_0^1 f(x,t) dx + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (-1)^k (u'_k(t) + \alpha u_k(t)) \right\}. \tag{17}
\end{aligned}$$

Далее из (14) и (16), получаем:

$$\begin{aligned}
u'_k(t) + \alpha u_k(t) = \frac{1}{b_k} & \left\{ (\alpha + \alpha_k) (\gamma_k^2 + \beta_k^2) e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t} \left[\alpha_k (\alpha \alpha_k - 2\alpha \gamma_k - \gamma_k^2 - \beta_k^2) \times \right. \right. \\
& \times \cos \beta_k t + \frac{\alpha_k}{\beta_k} ((\gamma_k - \alpha_k) (\gamma_k^2 + \beta_k^2) + \alpha (\gamma_k^2 - \beta_k^2 - \alpha_k \gamma_k)) \sin \beta_k t \Bigg] \varphi_{0k} + \\
& + \left[-2(\alpha + \alpha_k) \gamma_k e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t} \left[(2\alpha \gamma_k + \alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2) \cos \beta_k t + \right. \right. \\
& + \frac{1}{\beta_k} (\alpha (\alpha_k^2 + \beta_k^2 - \gamma_k^2) + \gamma_k (\alpha_k^2 - \beta_k^2 - \gamma_k^2)) \sin \beta_k t \Bigg] \varphi_{1k} + \left[(\alpha + \alpha_k) e^{\alpha_k t} + \right. \\
& + e^{\gamma_k t} \left[-(\alpha + \alpha_k) \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} (\alpha \gamma_k - \alpha \alpha_k + \beta_k^2 + \gamma_k^2 - \alpha_k \gamma_k) \sin \beta_k t \right] \Bigg] \varphi_{2k} + \\
& + \int_0^t F_k(\tau; u, a_0, a_1) \left[(\alpha + \alpha_k) e^{\alpha_k(t-\tau)} + e^{\gamma_k(t-\tau)} \left[(-\alpha + \alpha_k) \cos \beta_k(t-\tau) + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\gamma_k + \alpha}{\beta_k} (\gamma_k - \alpha_k) + \beta_k \right) \sin \beta_k (t - \tau) \Big] d\tau \Big\} \quad (k = 1, 2, \dots) . \quad (18)$$

Тогда из (17) с учетом (18), имеем:

$$\begin{aligned} a(t) = & [h(t)]^{-1} \left\{ h_1'''(t) + h_1''(t) - \int_0^1 f(x, t) dx + \right. \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (-1)^k \frac{1}{b_k} \left\{ \left[(\alpha + \alpha_k)(\gamma_k^2 + \beta_k^2) e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t} \left[\alpha_k (\alpha \alpha_k - 2\alpha \gamma_k - \gamma_k^2 - \beta_k^2) \times \right. \right. \right. \\ & \times \cos \beta_k t + \frac{\alpha_k}{\beta_k} ((\gamma_k - \alpha_k)(\gamma_k^2 + \beta_k^2) + \alpha(\gamma_k^2 - \beta_k^2 - \alpha_k \gamma_k)) \sin \beta_k t \Big] \varphi_{0k} + \\ & + \left[-2(\alpha + \alpha_k) \gamma_k e^{\alpha_k t} + e^{\gamma_k t} \left[(2\alpha \gamma_k + \alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2) \cos \beta_k t + \right. \right. \\ & + \frac{1}{\beta_k} (\alpha(\alpha_k^2 + \beta_k^2 - \gamma_k^2) + \gamma_k(\alpha_k^2 - \beta_k^2 - \gamma_k^2)) \sin \beta_k t \Big] \varphi_{1k} + \left[(\alpha + \alpha_k) e^{\alpha_k t} + \right. \\ & + e^{\gamma_k t} \left[-(\alpha + \alpha_k) \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} (\alpha \gamma_k - \alpha \alpha_k + \beta_k^2 + \gamma_k^2 - \alpha_k \gamma_k) \sin \beta_k t \right] \varphi_{2k} + \\ & + \int_0^t F_k(\tau; u, a_0, a_1) \left[(\alpha + \alpha_k) e^{\alpha_k(t-\tau)} + e^{\gamma_k(t-\tau)} \left[(-\alpha + \alpha_k) \cos \beta_k(t-\tau) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\gamma_k + \alpha}{\beta_k} (\gamma_k - \alpha_k) + \beta_k \right) \sin \beta_k(t-\tau) \right] d\tau \right\} \Big\} . \quad (19) \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3), (6) сведено к решению системы (15), (19) относительно неизвестных функций $u(x, t)$ и $a(t)$.

Можно доказать следующую лемму.

Лемма 2. Если $\{u(x, t), a(t)\}$ – любое классическое решение задачи (1)-(3), (6), то функции

$$u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

удовлетворяют системе (14).

Следствия. Из леммы 2 следует, что для доказательства единственности решения задачи (1)-(3), (6), достаточно доказать единственность решения системы (15), (19).

Теперь, с целью исследования задачи (1)-(3), (6) рассмотрим следующие пространства:

1. Обозначим через $B_{2,T}^3$ [7] совокупность всех функций $u(x, t)$ вида

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x, \quad \lambda_k = \frac{\pi}{2} (2k-1),$$

рассматриваемых в D_T для которых все функции $u_k(t) \in C[0, T]$ и

$$J_T(u) \equiv \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Норма в этом множестве определяется так:

$$\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} = J_T(u).$$

2. Через E_T^3 обозначим пространства вектор функции $\{u(x, t), a(t)\}$, таких что

$$u(x, t) \in B_{2,T}^3, \quad a(t) \in C[0, T] ..$$

Снабдим это пространство нормой:

$$\|z\|_{E_T^3,3} = \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + \|a(t)\|_{C[0,T]}.$$

Известно, что $B_{2,T}^3$ и E_T^3 являются банаховыми пространствами.

Рассмотрим в пространстве E_T^3 оператор

$$\Phi(u, a) = \{\Phi_1(u, a), \Phi_2(u, a)\},$$

где

$$\Phi_1(u, a) = \tilde{u}(x, t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k(t) \cos \lambda_k x, \quad \Phi_2(u, a) = \tilde{a}(t),$$

где $\tilde{u}_k(t)$ ($k=1,2,\dots$) и $\tilde{a}(t)$ и равны соответственно правым частям (14) и (19).

Примем обозначения

$$\alpha_{2k} = -\frac{1}{2} \left(\left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \lambda_k^2 + \frac{2}{27} \right) + \left[\frac{1}{4} \left(\left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \lambda_k^2 + \frac{2}{27} \right)^2 + \frac{1}{27} \left(\lambda_k^2 - \frac{1}{3} \right)^3 \right]^{1/2}, \quad (20)$$

$$\beta_{2k} = \frac{1}{2} \left(\left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \lambda_k^2 + \frac{2}{27} \right) + \left[\frac{1}{4} \left(\left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \lambda_k^2 + \frac{2}{27} \right)^2 + \frac{1}{27} \left(\lambda_k^2 - \frac{1}{3} \right)^3 \right]^{1/2}. \quad (21)$$

Тогда

$$\alpha_{1k} = \sqrt[3]{\alpha_{2k}}, \quad \beta_{1k} = -\sqrt[3]{\beta_{2k}}.$$

Отсюда, с учетом (20) и (21), получаем:

$$\alpha_{1k} + \beta_{1k} = \left| \sqrt[3]{\alpha_{2k}} - \sqrt[3]{\beta_{2k}} \right| = \left| \frac{\alpha_{2k} - \beta_{2k}}{\sqrt[3]{\alpha_{2k}^2} + \sqrt[3]{\alpha_{2k}\beta_{2k}} + \sqrt[3]{\beta_{2k}^2}} \right| \leq \frac{9\alpha}{2} + \frac{11}{2}.$$

Нетрудно видеть, что

$$|\alpha_k| \leq \left| \alpha_{1k} + \beta_{1k} - \frac{1}{3} \right| \leq \frac{9\alpha}{2} + \frac{13}{6} \equiv \varepsilon_1, \quad |\gamma_k| = \left| -\frac{1}{3} - \frac{\alpha_{1k} + \beta_{1k}}{2} \right| \leq \frac{9\alpha}{4} + \frac{5}{4} \equiv \varepsilon_2,$$

$$\varepsilon_3 \lambda_k \equiv \frac{\sqrt{2}}{3} \lambda_k \leq \beta_k \leq \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{1}{27} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\alpha - \frac{1}{27} \right)^2 + \frac{1}{27}}} \lambda_k \equiv \varepsilon_4 \lambda_k,$$

$$b_k = (\alpha_k - \gamma_k)^2 + \beta_k^2 \geq \beta_k^2 \geq \varepsilon_3^2 \lambda_k^2,$$

Учитывая эти соотношения, находим:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \leq \rho_0(T) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_{0k}|)^2 \right)^{1/2} + \rho_1(T) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_{1k}|)^2 \right)^{1/2} + \\ & + \rho_2(T) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |\varphi_{2k}|)^2 \right)^{1/2} + \rho_2(T) \sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{1/2} + \\ & + \rho_2(T) T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\| h_1'''(t) + h_1''(t) - \int_0^1 f(x, t) dx \right\|_{C[0,T]} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{1/2} \left[\rho_3(T) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_{0k}|)^2 \right)^{1/2} + \rho_4(T) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_{1k}|)^2 \right)^{1/2} - \right. \\
& + \rho_5(T) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |\varphi_{2k}|)^2 \right)^{1/2} + \rho_5(T) \sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{1/2} + , \\
& \left. + \rho_5(T) T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \right] . \tag{23}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\rho_0(T) &= \frac{\sqrt{6}}{\varepsilon_3^2} \left\{ (\varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2) e^{\varepsilon_1 T} + \varepsilon_1 e^{\varepsilon_2 T} \left[\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_3} (\varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3) \right] \right\}, \\
\rho_1(T) &= \frac{\sqrt{6}}{\varepsilon_3^2} \left\{ 2\varepsilon_2 e^{\varepsilon_1 T} + e^{\varepsilon_2 T} \left[2\varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2) \right] \right\}, \\
\rho_2(T) &= \frac{\sqrt{6}}{\varepsilon_3^2} \left\{ e^{\varepsilon_1 T} + e^{\varepsilon_2 T} \left[1 + \frac{1}{\varepsilon_3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \right] \right\}, \\
\rho_3(T) &= \frac{1}{\varepsilon_3^2} \left\{ (\alpha + \varepsilon_1) (\varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2) e^{\varepsilon_1 T} + e^{\varepsilon_2 T} \left[\varepsilon_1 (\alpha \varepsilon_1 + 2\alpha \varepsilon_2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} ((\varepsilon_1 + \varepsilon_2) (\varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2) + \alpha (\varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3)) \right] \right\}, \\
\rho_4(T) &= \frac{1}{\varepsilon_3^2} \left\{ 2\varepsilon_2 (\alpha + \varepsilon_1) e^{\varepsilon_1 T} + e^{\varepsilon_2 T} \left[\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2\alpha \varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_3} (\varepsilon_2 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2) + \alpha (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3)) \right] \right\}, \\
\rho_5(T) &= \frac{1}{\varepsilon_3^2} \left\{ (\alpha + \varepsilon_1) e^{\varepsilon_1 T} + e^{\varepsilon_2 T} \left[\alpha + \varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_3} (\alpha \varepsilon_2 + \alpha \varepsilon_1 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Предположим, что данные задачи (1)-(3), (6) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi_i(x) \in C^2[0,1]$, $\varphi_i'''(x) \in L_2(0,1)$ и $\varphi_i'(0) = \varphi_i(1) = \varphi_i''(1) = 0$ ($i = 0,1$).
2. $\varphi_2(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi_2''(x) \in L_2(0,1)$ и $\varphi_2'(0) = \varphi_2(1) = 0$.
3. $f(x,t), f_x(x,t) \in C(D_T)$, $f_{xx}(x,t) \in L_2(D_T)$ и $f_x(0,t) = f(1,t) = 0$ ($0 \leq t \leq T$).
4. $h(t) \in C^3[0,T]$, $h(t) \neq 0$ ($0 \leq t \leq T$).

Тогда из (22) и (23) имеем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^3} \leq A_1(T) + B_1(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \tag{24}$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq A_2(T) + B_2(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \tag{25}$$

где

$$A_1(T) = \rho_0(T) \|\varphi_0'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \rho_1(T) \|\varphi_1'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \rho_2(T) \|\varphi_2''(x)\|_{L_2(0,1)} + \rho_2(T) \sqrt{T} \|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$

$$\begin{aligned}
A_2(T) &= \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left\{ \left\| h_1'''(t) + h_1''(t) - \int_0^1 f(x,t) dx \right\|_{C[0,T]} + \right. \\
&+ \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{1/2} \left(\rho_3(T) \|\varphi_0'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \rho_4(T) \|\varphi_1'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \right. \\
&+ \left. \left. \rho_5(T) \|\varphi_2''(x)\|_{L_2(0,1)} + \rho_5(T) \sqrt{T} \|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \right) \right\}, \\
B_1(T) &= \rho_2(T)T, \quad B_2(T) = \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{1/2} T.
\end{aligned}$$

Из неравенств (24) - (25) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq A(T) + B(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (26)$$

где

$$A(T) = A_1(T) + A_2(T) \quad B(T) = B_1(T) + B_2(T).$$

Итак, доказана следующая

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1-4 и

$$B(T)(A(T) + 2)^2 < 1. \quad (27)$$

Тогда задача (1)-(3), (6) имеет в шаре $K = K_R (\|z\|_{E_T^3} \leq R = A(T) + 2)$ из E_T^3 единственное решение.

Доказательство. В пространстве пространства E_T^3 рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \quad (28)$$

где $z = \{u, a\}$, компоненты $\Phi_i(u, a)$ ($i = 1, 2$), оператора $\Phi(u, a)$, определены правыми частями уравнений (15), (19).

Рассмотрим оператор $\Phi(u, a)$ в шаре $K = K_R$ из E_T^3 . Аналогично (26) получаем, что для любых $z_1, z_2, z_3 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\begin{aligned}
\|\Phi z\|_{E_T^3} &\leq A(T) + B(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} \leq \\
&\leq A(T) + B(T)(A(T) + 2)^2 < A(T) + 2, \quad (29)
\end{aligned}$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^3} \leq B(T)R (\|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^3}). \quad (30)$$

Тогда в силу (27), из (29) и (30) ясно, что оператор $\Phi(u, a)$, удовлетворяют на множестве $K = K_R$ условиям принципа сжатых отображений. Поэтому оператор $\Phi(u, a)$, в шаре $K = K_R$ имеет единственную неподвижную точку $\{z\} = \{u, a\}$, которая является решением уравнения (28), т.е. является в шаре $K = K_R$ единственным решением системы (15), (19).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B_{2,T}^3$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$ в D_T .

Легко проверить, что $u_t(x,t)$, $u_{txx}(x,t)$, $u_{tt}(x,t)$, $u_{ttt}(x,t)$ непрерывны в D_T и уравнение (1), условия (2),(3) и (6) удовлетворяются в обычном смысле. Значит, $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1)-(3), (6). В силу следствия леммы 2 оно единственно в шаре $K = K_R$. Теорема доказана.

С помощью леммы 1, из последней теоремы вытекает однозначная разрешимость исходной задачи (1)-(4).

Теорема 2. Пусть выполняются все условия теоремы 1 и

$$\int_0^1 \varphi_0(x) dx = h(0), \int_0^1 \varphi_1(x) dx = h'(0), \int_0^1 \varphi_2(x) dx = h''(0).$$

Тогда задача (1)-(4) имеет в шаре $K = K_R (\|z\|_{E_T^3} \leq R = A(T) + 2)$ из E_T^3 единственное классическое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач // ДАН СССР, 1943, т. 39, №5, с.195-198.
2. Лаврентьев М.М., Васильев В.Г., Романов В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1969
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.Т. Некорректные задачи математической физики и анализа. М., 1980
4. Иванов В.К, Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М., 1978
5. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М., 1984. 264 с.
6. Варламов В. В. Об одной начально-краевой задаче для гиперболического уравнения третьего порядка // Дифференциальные уравнения, 1990, т.26, №8, с. 1455-1457
7. Худавердиев К.И., Велиев А.А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью, Баку: Чашыюглы, 2010, 168 с.

XÜLASƏ

Üçüncü tərtib hiperbolik tənlik üçün əlavə inteqral sərhəd şərtli tərs məsələsi

İşdə üçüncü tərtib hiperbolik tənlik üçün əlavə inteqral sərhəd şərtli tərs sərhəd məsələsi tədqiq olunur. Furiye üsulumun köməyilə məsələ inteqral tənliklər sisteminə gətirilir və sıxılmış inikas prinsipindən istifadə edərək inteqral tənliklər sistemində həllin varlığı və yeganəliyi isbat edilir. Sonra isə qoyulmuş məsələnin klassik həllinin varlığı və yeganəliyi isbat olunur.

ABSTRACT

Inverse problem with integral overdetermination condition for a third order hyperbolic equation

An inverse boundary value problem for the third order hyperbolic equation with an additional integral condition of the first kind is investigated. First the initial problem is reduced to the equivalent problem, for which the existence and uniqueness theorem is proved. Then using these facts the existence and uniqueness of the classical solution of initial problem is proved.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə
çapa tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

Məqaləni çapa təqdim etdi: *Fizika üzrə fəlsəfə doktoru,*
dosent F.Qocayev

KÖNÜL MƏMMƏDOVA

Naxçıvan Dövlət Universiteti

dolça1976@gmail.com

UOT: 517.9

CIRLAŞAN PARABOLİK TƏNLİKLƏRİN HƏLLƏRİNİN ARADAN QALDIRILMA BİLƏN ÇOXLUQLARININ TƏDQIQI

Açar sözlər: *qeyri xətti, cırılşan, başlangıç-sərhəd məsələsi, aradan qaldırılma bilən çoxluqlar*

Key words: *nonlinear, degenerate, initial – boundary problem, removable singularity*

Ключевые слова: *нелинейные, вырождающихся, начально-граничная задача, устранимые множества.*

Məqalədə cırılşan qeyri-xətti parabolik tənliklərin həllərinin aradan qaldırılma bilən çoxluqları öyrənilir.

Xətti elliptik və parabolik tənliklərin həllərinin aradan qaldırılma bilən çoxluqları O.A.Oleynikin [1], [2] əsərlərində öyrənilmişdir. Kvazi-xətti tənliklər üçün bu tipli nəticələr A. F.Tedeyev, A.E.Şişkov [3] və T.S.Hacıyev [4] tərəfindən alınmışdır. S.Bonafade [5] cırılşan tənliklərin həllərinin keyfiyyət xüsusiyyətlərini tədqiq etmişdir.

Həmçinin [7] -[11] işlərini də göstərə bilərik.

Evklid $R_{x,t}^{n+1}$ fəzasının $H_T = \{(x, t): 0 < t < T < \infty\}$ zolağında qeyri-məhdud oblastda başlangıç-sərhəd məsələsinə baxaq.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, t, u, \nabla u, \dots, \nabla^m u) = 0 \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0 \quad (2)$$

$$D_x^\alpha u|_\Gamma = 0 \quad |\alpha| \leq m-1 \quad (3)$$

Burada $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, m \geq 1$.

Q oblastı qeyri – kompakt sərhədə malikdir $\partial Q = \Gamma_0 \cup \Gamma_T \cup \Gamma$, burada $\Gamma_0 = \partial Q \cap \{(x, t): t = 0\}$, $\Gamma_T = \partial Q \cap \{(x, t): t = T\}$.

Fərz edək ki, $A_\alpha(x, t, \xi)$ əmsalları $(x, t) \in Q$ nəzərən ölçülən funksiyalardır, $\xi \in R^m$ nəzərən kəsilməzdir və aşağıdakı şərtləri ödəyirlər.

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, t, \xi) \xi_\alpha^m \geq \omega(x) |\xi^m|^p - c_1 \omega(x) \sum_{i=1}^{m-1} |\xi_i|^p - f_1(x, t), \quad (4)$$

$$|A_\alpha(x, t, \xi)| \leq c_2 \omega(x) \sum_{i=0}^m |\xi_i|^{p-1} + f_2(x, t), \quad (5)$$

Burada $\xi = (\xi^0, \dots, \xi^m)$, $\xi^i = (\xi_\alpha^i)$, $|\alpha| = i$, $c_1, c_2 > 0$, $p > 1$,

$f_1(x, t) \in L_p(0, T; L_{p,loc}(\Omega_t))$, $f_2(x, t) \in L_{1,loc}(Q)$, $\Omega_\tau = Q \cap \{(x, t): t = \tau\}$,

$L_p(0, T, W_{p, \omega}^m(\Omega'_t))$ fəzası bu cür təyin olunur: $\left\{ u(x, t) : \int_0^T \left(\|u\|_{W_{p, \omega}^m(\Omega'_t)} \right)^p dt < \infty \right\}$ burada

Ω_t Q -nün məhdud alt çoxludur, $\Omega'_t = Q' \cap \{(x, t) : t = \tau\}$. $W_{p, \omega}^m(\Omega'_t) \subset C^m(\Omega'_t)$ fəzasından olan funksiyaların qapanmasıdır və bu fəzada norma belə təyin olunur:

$$\|u\|_{W_{p, \omega}^m(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \omega(x) \sum_{|\alpha| \leq m} |D_x^\alpha|^p dx dt \right)^{1/p}.$$

Fərz edək ki, $\omega(x)$, $x \in \Omega$ ölçülən, mənfə olmayan, aşağıdakı şərti ödəyən funksiyadır

$$\omega(x) \in L_{1, loc}(Q) \quad (6)$$

Burada, $\Omega_s = \Omega_t \cap B_s$, $B_s = \{x : |x| < s\}$, c_i – yalnız məsələnin verilənlərindən asılı müsbət sabitlərdir. Xüsusi halda (6) şərtlərindən $\Omega \in A_\tau$ yəni ixtiyari $\rho > 0$ üçün

$$\int_{\Omega_\rho} \omega dx \left[\int_{\Omega_\rho} \omega(x)^{\frac{1}{\sigma-1}} dx \right]^{\sigma-1} \leq C_4 \rho^{n\sigma} \quad (7)$$

∂Q -nün həndəsi konfigurasiyasını ifadə etmək üçün $\sigma(r, \tau) = S(r) \cap \Omega$ kəsiyinin, burada $S(r) = Q \cap \partial Q(r)$, $Q(r) = Q \cap \{B_s \times (0, T)\}$, $\lambda_p(r, \tau)$ çəkili qeyri-xətti tezlik anlayışını verək:

$$\lambda_p(r, \tau) = \inf \left(\int_{\sigma(r, \tau)} \omega(x) |\nabla v|^p d\tau \right) \left(\int_{\tau(r, \tau)} \omega(x) |v|^p d\tau \right)^{-1},$$

burada aşağı sərhəd ∂Q -da sıfıra yaxınlaşan kəsilməz diferensiallanan funksiyalar üzrə götürülür.

Əgər ixtiyari $\varphi(x, t) \in L_p(0, T; \overset{\circ}{W}_{p, \omega}^m(\Omega_1) \cap h_2(\Omega))$ funksiyası üçün

$$\int_Q \frac{\partial u}{\partial t} \varphi dx dt + \int_Q \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x, t, u, \dots, D^\alpha u) D^\alpha \varphi dx dt = 0 \quad (8)$$

İnteqral eyniliyi ödənilirsə, onda $u(x, t) \in L_p(0, T; \overset{\circ}{W}_{p, \omega, loc}^m(\Omega_t)) \cap W_2^1(0, T; L_{2, loc}(\Omega_t))$

funksiyası (1)-(3) məsələsinin ümumiləşmiş həlli adlanır.

Biz elə oblastlar sinfinə baxacağıq ki, $\int_{\sigma(r, \tau)} \omega(x) |u|^p dx dt \leq \lambda_p^{-p}(r, \tau) \int_{\sigma(r, \tau)} \omega(x) |\nabla u|^p dx dt$ (9)

qiymətləndirilməsi ödənilsin.

Fərz edək ki, $k(x) \in C_{loc}^m(\Omega)$ müsbət funksiyadır, $k(0)=0$ və $x \in \Omega$ üçün

$$|D_x k(x)| \geq h_1 > 0$$

$$|D_x^j k(x)| \leq h_2 (k(x))^{-j+1}, h_2 > 0, j = 1, 2, \dots, m.$$

qiymətləndirilmələri ödənilir.

Aşağıdakı işarələmələri daxil edək:

$$\lambda_{\mu(s)}^2(r, \tau) = \lambda_2^2(r, \tau) + \mu_{(s)}^{\frac{2}{m}}, \forall s, \tau > 0.$$

$$J_{\mu(s)p}(r, \tau) = \int_{\Omega \tau(s)} \left(|D^m u|^p + \mu^2(s) u^2 \right) dx,$$

$J_{\mu(s), 2}(r, \tau), \Omega_\tau(s_1) \setminus \Omega_\tau(s_2) = M_\tau(s_1, s_2)$, burada $\mu(v)$ funksiyası sonradan təyin ediləcək.

Lemma 1. Fərz edək ki, $u(x,t) \in h_p(0,T;W_{p,\omega}^m(\Omega_\tau) \cap L_2(Q))$ və $\mu(k(x))$ Ω - da ölçülən, mənfi olmayan lokal məhdud funksiyadır. Onda aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur.

$$\int_{M_r(s_1,s_2)} |D_z^j u|^2 \lambda_{\mu(s)}(k(x), \tau) \oint f(k(x)) dx \leq \frac{h_2}{h_1} \int_{M_r(s_1,s_2)} (|D_z^m u|^2 + \mu^2(s) |D^j u|^2) f(k(x)) dx \quad (10)$$

burada $j \leq m$.

m dəfə kəsilməz diferensiallanan $\xi(t)$ funksiyaları daxil edək:

$$0 < \xi(t) < 1, 2^{-1} < t < 1; \xi(t) = 1$$

$t < 2^{-1}$ üçün, $\xi(t) = 0$ üçün $t \geq 1$. $\xi(t) = \xi\left(\frac{t-h}{1-h}\right)$ işarə edək. Bu funksiya üçün aşağıdakı qiymətləndirmələr doğrudur.

$$|D_z^j \xi_h\left(\frac{k(x)}{r}\right)| \leq \frac{C_j}{r[1-h]^j}, rh + \frac{r}{2}(1-h) < r, j = 0, 1, \dots, m$$

$$D_z^j \xi_h\left(\frac{k(x)}{r}\right) = 0 \quad g(x) \leq rh + \frac{r}{2}(1-h) \quad \text{üçün } g(x) > r, j > l$$

Lemma 2. Fərz edək, kəsilməz azalmayan $I(t)$ funksiyası (t, ∞) aşağıdakı bərabərsizliyi ödəyir.

$$I(t) \leq \theta I(t\psi(t)), \quad 0 < \theta < 1,$$

$$\psi(t) = 1 + \varphi(t), \quad \varphi(t) > 0 \quad (11)$$

və ölçülən $\varphi(t)$ funksiyası üçün

$$(\varphi(t))^{-1} \inf \varphi(\tau) > \delta > 0 \quad (12)$$

$t < \tau < t\psi(t)$ doğrudur.

Onda $I(t)$ üçün aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur.

$$I(t) \geq \theta \exp\left(\delta \ln \theta^{-1} \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{\tau \varphi(\tau)}\right) I(t_0)$$

Bizim əsas məqsədimiz $J_{\mu(\tau)p}(\tau)$ funksiyasının $\tau \rightarrow \infty$ olduqda qiymətləndirilməsinin alınmasıdır.

Aşağıdakı $\varphi(\tau)$ və $\mu(\tau)$ funksiyalarını təyin edək:

$$\inf_{\tau < k(x) < \tau\psi(\tau)} \lambda_{\mu(\tau)}(k(x), t)\psi(\tau) - 1 \geq h_0 > 0, \quad \forall \tau > \tau_0, \quad (13)$$

$$0 < h \leq \mu(\tau\psi(\tau))(\mu(\tau))^{-1} \leq H < \infty, \quad \forall i > \tau \quad (14)$$

Beləliklə (8) inteqral eyniliyindən (4), (5) şərtlərindən, lemma 1 və lemma 2- dən istifadə edərək aşağıdakı teoremi alırıq.

Teorem: Fərz edək ki, $u(x,t) \in L_p(0,T;W_{p,\omega,loc}^m(\Omega,\Gamma)) \cap W_2^1(0,T;L_2(\Omega))$ (1)-(3) məsələsinin ümumiləşmiş həllidir. Əmsallar (5) şərtini, Ω oblastı isə (A) şərtini ödəyir və müəyyən $\sigma > 0$ sabiti üçün

$$J_{\mu(t)}(t) < C \exp(C_0 \nu \ln(k_0 + \gamma))^{-1} \int_t^{t_0} \frac{d\tau}{\tau(1-\varphi(\tau))}, \quad \forall t < t_0$$

qiymətləndirməsi doğrudur. Onda $u(x,t)$ həllinin cırılğan Γ çoxluğu aradan qaldırıla bilər.

ƏDƏBİYYAT

1. Oleinik O.A., Josifian G.A. Boundary value problems for second order elliptic equations in unbounded domains and saint-Venant's principle. Ann. Scuola Norm. Super Pisa. 1977, Ser. IV, vol.2, pp. 269-290
2. Oleinik O.A., Josifian G.A. On exceptional properties on a boundary and uniqueness of solutions of boundary value problems for second order elliptic equations. Funk.anal. 1977, vol, II, issue 3, pp.54-67 (Russian).

3. Tedeev A.F., Shishkov A.E. On quality properties of solutions and subsolutions of quasilinear elliptic equations. *Izv. Vuzov. Matematika*, 1984, №1, pp.62-68 (Russian).
4. Gadjiev T.S. On behavior of solutions of mixed problems for quasilinear elliptic equations. *Diff.Uravneniya*, 1991, pp 1031-1036 (Russian)
5. Bonafade S. Quazilinear degenerate elliptic variational inequalities with discontinuous coefficients. *Comment. Math Univ. Carolina*. 1993, 34, №1, pp.55-61
6. Jorge Garcia-Melian. Boundary behavior for large solutions to elliptic equations with singular weights, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications*, v. 67, issue 3, 2007, pp.818-826
7. Carleson L. Selected problems exceptional sets. Toronto. London, 1967, p.126
8. Kondratyev V.A., Landis E.M. Qualitative treory of portial differential equations of second order. *Itogi nauki i tekhniki*. 1988, vol.3, p.99-212 (Rissian)
9. Oleynik O.A., Iosifyan G.A. On exceptable features on the boundary and uniqueness of the solutions of boundary and uniqueness of the solutions of boun dary value problems for second order elliptic and parabolic equations. *Funk analiz*.1997, vol. II, issue 3, pp.54-67 (Russian).
10. Gadyiev T., Mamedova V. On removable sets of solution of second order elliptic and parabolic eqution, *Ukraine Mathematic Journal*, 2009, vol. 61, №11, p.1485-1496
11. Kilpelainen T., Zong X. Removable sets for continuous solutions of quasi linear elliptic equations. *Proc.Amer. Math. Soc.* 2002, 130, № 6, p. 1681-1688

ABSTRACT

Mammadova Konul

The estimates of solutions of degenerate parabolic equation of higher order

The nonlinear diferential equations arising in many problems of physics, mechanic, biophysics biology and so on.

The investigation this problem having larger value in now in connected with meny process in higher temperatura, deformation and so on.

If the domain have the difficult boindary or inbounted then the investigated the nonlinear elliptic and parabolic equtions having, larger value in thory of partial differential equations.

In this paper in unbounded layer for degenerate nonlinear parabolic equations initial boundry problem is considered. Also removability of solutions is study.

РЕЗЮМЕ

Конюл Мамедова

Оценки решений вырождающихся параболических уравнений высокого порядка

Нелинейные дифференциальные уравнения возникают во многих задачах современной физики, механики, биофизики, биологии, экологии биохимии и некоторых других сферах. Исследование этих задач имеют большое значение в современности в связи происхождением многих процессов во время больших температур, явлений и деформации.

Если граница области имеют сложную границу или она неограничена, то исследование нелинейных эллиптических и параболических уравнений имеют большое значение в теории дифференциальных уравнений с особыми производными.

В данной статье, Евклидоваго пространство $H_T = \{(x,t): 0 < t < T < \infty\}$ слоев неограниченном области для вырождающихся нелинейных параболических уравнении рассматривается начально-граническая задача, изучаются устранённые особенности решений. Для непрерывный, неубывающей функции $I(t)$ получены оценки на основании которых оценки функции $J_{\mu(\tau)p}(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə çapa tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

Məqaləni çapa təqdim etdi: *Fizika üzrə fəlsəfə doktoru, dosent F.Qocayev*

ELMAN MAHMUDOV
ƏRƏSTUN HƏSƏNOV
NAILƏ HƏSƏN
TOFIQ ALLAHVERDİYEV
Heydər Əliyev adına AAHM

UOT: 512

QOŞMA VEKTOR VƏ ONUN ƏSAS XASSƏLƏRİ

Açar sözlər: qoşma vektor, kompleks müstəvi, kompleks ədədin bazis vektoru.

Ключевые слова: сопряженный вектор, комплексная плоскость, базисный вектор комплексного числа.

Key words: vector bundle, complex plane, basis vector of complex numbers.

I. Qoşma vektor anlayışı.

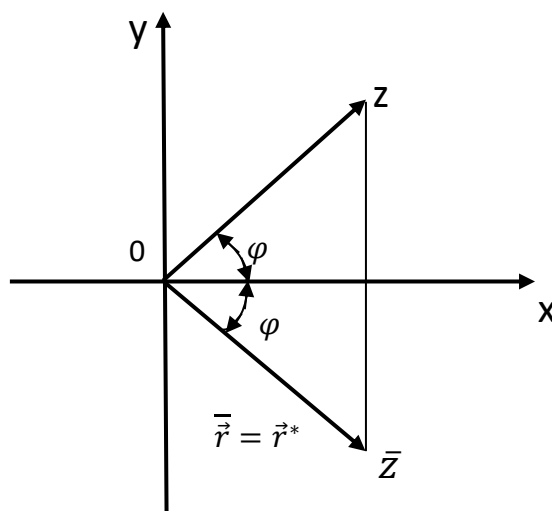
Məlumdur ki, xoy kompleks müstəvi üzərində verilmiş $z = x + iy$ (1.1) kompleks ədədinin, $\bar{z} = x - iy$ (1.2) kimi qoşma kompleks ədədi həmişə mövcuddur. Burada i xəyali ədəddir. Digər tərəfdən də məlumdur ki, hər bir kompleks ədəd, kompleks müstəvi üzərində bir \vec{r} vektoruna uyğundur. Belə ki, z kompleks ədədinə uyğun olan \vec{r} vektoru koordinatları vasitəsilə aşağıdakı kimi təyin olunur. $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (1.3). Burada \vec{i} və \vec{j} koordinat oxları istiqamətdə vahid vektorlardır. Çünki kompleks müstəvi ilə həqiqi müstəvinin fərqi yalnız onların vahid vektorlarıdır. Onda deyə bilərik ki, kompleks müstəvi üzərində \bar{z} qoşma kompleks ədədinə də bir vektor uyğun olar. \bar{z} qoşma kompleks ədədinə uyğun olan vektoru, \vec{r} vektorunun, qoşma vektoru adlandıraraq və $\vec{\bar{r}}$ ilə işarə edək. \vec{r} vektorunun qoşma vektorunu \vec{r}^* kimi də işarə etmək olar. Bu deyilənlərə əsasən \vec{r} vektorunun qoşma vektorunu koordinatları vasitəsi ilə aşağıdakı kimi təyin edə bilərik.

$$\vec{\bar{r}} = \vec{r}^* = x\vec{i} - y\vec{j} \quad (1.4)$$

Digər tərəfdən məlumdur ki, $e^{i\varphi}$ ifadəsi Eyler düsturuna əsasən aşağıdakı kimi təyin olunur.

$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ (1.5). (1.5)-in sağ tərəfini kompleks ədədin bazisi adlandıraraq və z^0 ilə işarə edək.

Qoşma vektor həndəsi olaraq şəkildə göstərilmişdir.



Onda z^0 bazis kompleks ədədinə uyğun, bazis vektor (vahid vektor) aşağıdakı kimi olar.
 $\vec{r}^0 = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi$ (1.6). Bu vektorun qoşma vektoru isə $\vec{\bar{r}}^0 = \vec{i} \cos \varphi - \vec{j} \sin \varphi$
(1.7) olar. (1.6)-ı ilə (1.7)-i tərəf-tərəfə toplasaq və çıxsaq alarıq. $\cos \varphi = \frac{\vec{r}^0 + \vec{\bar{r}}^0}{2\vec{i}}$ (1.8),

$\sin \varphi = \frac{\vec{r}^0 - \vec{\bar{r}}^0}{2\vec{j}}$ (1.9). Burada $|\vec{r}^0| = |\vec{\bar{r}}^0|$ olur.

(1.8) və (1.9)-un düzgünlüyünü yoxlamaq üçün $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ bərabərliyini yoxlayaq.

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi &= \left(\frac{\vec{r}^0 + \vec{\bar{r}}^0}{2\vec{i}} \right)^2 + \left(\frac{\vec{r}^0 - \vec{\bar{r}}^0}{2\vec{j}} \right)^2 = \\ &= \frac{(\vec{r}^0)^2 + 2\vec{r}^0 \vec{\bar{r}}^0 + (\vec{\bar{r}}^0)^2}{(2\vec{i})^2} + \frac{(\vec{r}^0)^2 - 2\vec{r}^0 \vec{\bar{r}}^0 + (\vec{\bar{r}}^0)^2}{(2\vec{j})^2} = \\ &= \frac{1 + 2\vec{r}^0 \vec{\bar{r}}^0 + 1}{4} + \frac{1 - 2\vec{r}^0 \vec{\bar{r}}^0 + 1}{4} = \frac{1 + 2\vec{r}^0 \vec{\bar{r}}^0 + 1 + 1 - 2\vec{r}^0 \vec{\bar{r}}^0 + 1}{4} = 1 \end{aligned}$$

Deməli (1.8) və (1.9) bərabərlikləri düzgün təyin olunmuşdur.

İndi isə vektorla öz qoşması arasında və iki qoşma vektor arasında bəzi əməllərə baxaq.

II. Vektorla öz qoşması arasında bəzi əməllər.

Tutaq ki, bizə $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ vektoru və bunun qoşması olan $\vec{\bar{r}} = x\vec{i} - y\vec{j}$ vektoru verilmişdir. Bunlar arasında aşağıdakı kimi əməllərə baxaq.

1. Toplama $\vec{r} + \vec{\bar{r}} = x\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{i} - y\vec{j} = 2x\vec{i}$ (2.1)

2. Çıxma $\vec{r} - \vec{\bar{r}} = x\vec{i} + y\vec{j} - x\vec{i} + y\vec{j} = 2y\vec{j}$ (2.2)

İndi isə vektorun öz qoşması ilə skalyar və vektorial hasillərini ayrıca təyin edək.

3. Skalyar hasil

$$\begin{aligned} (\vec{r}, \vec{\bar{r}}) &= ((x\vec{i} + y\vec{j}), (x\vec{i} - y\vec{j})) = \\ &= x^2(\vec{i}, \vec{i}) - xy(\vec{i}, \vec{j}) + xy(\vec{j}, \vec{i}) - y^2(\vec{j}, \vec{j}) = x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Deməli, alırıq $(\vec{r}, \vec{\bar{r}}) = x^2 - y^2$ (2.3)

4. Vektorial hasil

$$\begin{aligned} [\vec{r}, \vec{\bar{r}}] &= [(x\vec{i} + y\vec{j}), (x\vec{i} - y\vec{j})] = \\ &= x^2[\vec{i}, \vec{i}] - xy[\vec{i}, \vec{j}] + xy[\vec{j}, \vec{i}] - y^2[\vec{j}, \vec{j}] = -xy\vec{k} - xy\vec{k} = -2xy\vec{k} \end{aligned}$$

Deməli, alırıq $[\vec{r}, \vec{\bar{r}}] = -2xy\vec{k}$ (2.4)

5. Bölmə. Bölmə əməlini yerinə yetirmək üçün kəsrin sürət və məxrəcini, məxrəcin qoşmasına skalyar və vektorial vuraq. Yəni məsələyə iki halda baxaq.

a) əvvəlcə sürət və məxrəci, məxrəcin qoşmasına skalyar vuraq:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{r}}{\vec{\bar{r}}} &= \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x\vec{i} - y\vec{j}} = \frac{((x\vec{i} + y\vec{j}), (x\vec{i} + y\vec{j}))}{((x\vec{i} - y\vec{j}), (x\vec{i} + y\vec{j}))} = \\ &= \frac{x^2(\vec{i}, \vec{i}) + xy(\vec{i}, \vec{j}) + yx(\vec{j}, \vec{i}) + y^2(\vec{j}, \vec{j})}{x^2(\vec{i}, \vec{i}) + xy(\vec{i}, \vec{j}) - yx(\vec{j}, \vec{i}) - y^2(\vec{j}, \vec{j})} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \end{aligned}$$

Deməli, alırıq $\frac{\vec{r}}{\vec{\bar{r}}} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ (2.5)

b) İndi isə sürət və məxrəci, məxrəcin qoşmasına vektorial vuraq

$$\begin{aligned} \frac{\vec{r}}{\vec{\bar{r}}} &= \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x\vec{i} - y\vec{j}} = \frac{[(x\vec{i} + y\vec{j}), (x\vec{i} + y\vec{j})]}{[(x\vec{i} - y\vec{j}), (x\vec{i} + y\vec{j})]} = \\ &= \frac{x^2[\vec{i}, \vec{i}] + xy[\vec{i}, \vec{j}] + yx[\vec{j}, \vec{i}] + y^2[\vec{j}, \vec{j}]}{x^2[\vec{i}, \vec{i}] + xy[\vec{i}, \vec{j}] - yx[\vec{j}, \vec{i}] - y^2[\vec{j}, \vec{j}]} = \frac{xy\vec{k} - xy\vec{k}}{xy\vec{k} + xy\vec{k}} = \frac{0}{2xy\vec{k}} = 0 \end{aligned}$$

Deməli, alırıq $\frac{\vec{r}}{\vec{r}} = 0$ (2.6)

III. İki qoşma vektor arasında bəzi əməllər.

Tutaq ki, bizə $\vec{r}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$ və $\vec{r}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}$ vektorları verilmişdir. Bu vektorların qoşması $\vec{r}_1^* = x_1 \vec{i} - y_1 \vec{j}$ və $\vec{r}_2^* = x_2 \vec{i} - y_2 \vec{j}$ olar. Bu vektorlar arasında aşağıdakı əməllərə baxaq.

1) Toplama.

$$\vec{r}_1^* + \vec{r}_2^* = (x_1 \vec{i} - y_1 \vec{j}) + (x_2 \vec{i} - y_2 \vec{j}) = (x_1 + x_2) \vec{i} - (y_1 + y_2) \vec{j} \quad (3.1)$$

2) Çıxma.

$$\vec{r}_1^* - \vec{r}_2^* = (x_1 \vec{i} - y_1 \vec{j}) - (x_2 \vec{i} - y_2 \vec{j}) = (x_1 - x_2) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} \quad (3.2)$$

3) Verilmiş vektorların skalyar və vektorial hasillərinə ayrıca baxaq

a. Skalyar hasil

$$\begin{aligned} (\vec{r}_1^*, \vec{r}_2^*) &= ((x_1 \vec{i} - y_1 \vec{j}), (x_2 \vec{i} - y_2 \vec{j})) = \\ &= x_1 x_2 (\vec{i}, \vec{i}) - x_1 y_2 (\vec{i}, \vec{j}) - y_1 x_2 (\vec{j}, \vec{i}) + y_1 y_2 (\vec{j}, \vec{j}) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \end{aligned}$$

Deməli, alırıq $(\vec{r}_1^*, \vec{r}_2^*) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ (3.3)

a) Vektorial hasil

$$\begin{aligned} [\vec{r}_1^*, \vec{r}_2^*] &= [(x_1 \vec{i} - y_1 \vec{j}), (x_2 \vec{i} - y_2 \vec{j})] = \\ &= x_1 x_2 [\vec{i}, \vec{i}] - x_1 y_2 [\vec{i}, \vec{j}] - y_1 x_2 [\vec{j}, \vec{i}] + y_1 y_2 [\vec{j}, \vec{j}] = \\ &= -x_1 y_2 \vec{k} + y_1 x_2 \vec{k} = (y_1 x_2 - x_1 y_2) \vec{k} \end{aligned}$$

Deməli, alırıq $[\vec{r}_1^*, \vec{r}_2^*] = (y_1 x_2 - x_1 y_2) \vec{k}$ (3.4)

4) Bölmə. Tutaq ki, \vec{r}_1 və \vec{r}_2 vektorlarının qoşmaları olan $\vec{r}_1^* = x_1 \vec{i} - y_1 \vec{j}$ və $\vec{r}_2^* = x_2 \vec{i} - y_2 \vec{j}$ vektorları verilmişdir.

$\frac{\vec{r}_1^*}{\vec{r}_2^*} = \frac{x_1 \vec{i} - y_1 \vec{j}}{x_2 \vec{i} - y_2 \vec{j}}$ nisbətində baxaq. Bu kəsrin sürət və məxrəcini, məxrəcin qoşmasına skalyar vuraq

$$\begin{aligned} \frac{\vec{r}_1^*}{\vec{r}_2^*} &= \frac{((x_1 \vec{i} - y_1 \vec{j}), (x_2 \vec{i} - y_2 \vec{j}))}{((x_2 \vec{i} - y_2 \vec{j}), (x_2 \vec{i} - y_2 \vec{j}))} = \\ &= \frac{x_1 x_2 (\vec{i}, \vec{i}) + x_1 y_2 (\vec{i}, \vec{j}) - y_1 x_2 (\vec{j}, \vec{i}) - y_1 y_2 (\vec{j}, \vec{j})}{x_2 x_2 (\vec{i}, \vec{i}) + x_2 y_2 (\vec{i}, \vec{j}) - y_2 x_2 (\vec{j}, \vec{i}) - y_2 y_2 (\vec{j}, \vec{j})} = \\ &= \frac{x_1 x_2 \vec{i}^2 - y_1 y_2 \vec{j}^2}{x_2 x_2 \vec{i}^2 - y_2 y_2 \vec{j}^2} = \frac{x_1 x_2 - y_1 y_2}{x_2^2 - y_2^2} \end{aligned}$$

Deməli, alırıq $\frac{\vec{r}_1^*}{\vec{r}_2^*} = \frac{x_1 x_2 - y_1 y_2}{x_2^2 - y_2^2}$ (3.5)

Eyni qayda ilə bölmə zamanı məxrəci və sürəti məxrəcin qoşmasına vektorial vuraq.

$$\begin{aligned} \frac{\vec{r}_1^*}{\vec{r}_2^*} &= \frac{[(x_1 \vec{i} - y_1 \vec{j}), (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j})]}{[(x_2 \vec{i} - y_2 \vec{j}), (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j})]} = \\ &= \frac{x_1 x_2 [\vec{i}, \vec{i}] + x_1 y_2 [\vec{i}, \vec{j}] - y_1 x_2 [\vec{j}, \vec{i}] - y_1 y_2 [\vec{j}, \vec{j}]}{x_2 x_2 [\vec{i}, \vec{i}] + x_2 y_2 [\vec{i}, \vec{j}] - y_2 x_2 [\vec{j}, \vec{i}] - y_2 y_2 [\vec{j}, \vec{j}]} = \\ &= \frac{x_1 x_2 \vec{k} + y_1 x_2 \vec{k}}{x_2 y_2 \vec{k} - y_2 x_2 \vec{k}} = \frac{x_1 y_2 + y_1 x_2}{x_2 y_2 + y_2 x_2} \end{aligned}$$

Deməli, alırıq $\frac{\vec{r}_1^*}{\vec{r}_2^*} = \frac{x_1 y_2 + y_1 x_2}{x_2 y_2 + y_2 x_2} = \frac{x_1 y_2 + y_1 x_2}{2 x_2 y_2}$ (3.6)

Beləliklə, bu hasillərdən aydın olur ki, hər iki halda bölmə nəticəsində alınan kəmiyyət skalyardır.

Ədəbiyyat

1. А.Д.Мышкис, «Лекции по высшей математике», Наука, Москва 1967.
2. Н.Қ.Мәмәдов, “Nəzəri mexanika” - I hissə 1956.
3. E.S.Mahmudov, İ.E.Mahmudova, “Vektorların vurulması”, Naxçıvan Regional Elm mərkəzinin əsərləri. VII buraxılış, Bakı “Elm” -2003

РЕЗЮМЕ

**Элман Махмудов
Арастун Гасанов
Наиля Гасан
Тофиг Аллахвердиев**

СОПРЯЖЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И ИХ ОСОБЕННЫЕ СВОЙСТВА

В статье говорится о сопряженных векторов, а так же выполнение некоторые действия над ними. И так, эти проблемы были выполнены. А так же для единичных векторов были проверена правильность выражение $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$.

Дав понятия сопряжённых векторов, рассматривая действия сложения, вычитания умножения и деления между вектором и его сопряжёнными а также между двумя сопряжёнными векторами приводит к некоторым результатам. В это время использовалось серьёзно математическими действиями.

ABSTRACT

**Elman Mahmudov
Arastun Hasanov
Naila Hassan
Tofiq Allahveriyev**

INSERT VECTOR AND ITS FEATURES

Main goal of the article is to present the notion of insert vector and accomplish some work on it. So these tasks have entirely been fulfilled. also the correctness of the current vector for the $\cos \varphi$ and $\sin \varphi$ has been checked up.

The insert is in the meaning of vector between its insert and vector got some result looking at the addition, calculation, multiplication and division have been done serious mathematical operations.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə
çapa tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

MİRHƏSƏN TAHİROV

AMEA Naxçıvan Bölməsi

E-mail: tahirov_hesen@mail.ru

UOT 539.12

PROSİYONUN SPEKTRİNDƏ BALMER XƏTLƏRİNİN GENİŞLƏNMƏ MEXANİZMLƏRİ

Açar sözlər: *Prosion, Ştark effekti, spektr xətləri, Balmer xətləri, Fraunhofer xətləri, profilin yarımənisi*

Key words: *Prosion, Stark effect, spectral line, Balmer lines, Fraunhofer line, half-width profile*

Ключевые слова: *Просион, эффект Штарка, спектральные линии, бальмеровские линии, фраунгоферовые линии, полуширина профиля.*

Məlum olduğu kimi ulduz atmosferlərində hidrogen xətlərinin genişlənmə mexanizmləri digər elementlərin xətlərinin genişlənmə mexanizmlərindən xeyli fərqlənir. Əgər metal xətlərinin genişlənməsində əsas rol şüalanmanın sönməsi oynayırsa, hidrogen xətlərinin genişlənməsində əsas rol oynayan Ştark effektidir [1]. Ulduz atmosferlərində hidrogen xətlərinin genişlənmə mexanizmləri Jager [4], David [5], Kurocka [10], Zelenka [6], Vernazza [7, 8], Atroshenko [9] və başqaları tərəfindən öyrənilmişdir.

Bəzi tədqiqatçılar hesab edir ki, ulduz atmosferlərində hidrogen xətlərinin genişlənməsində Ştark effekti ilə yanaşı məxsusi təzyiq də, şüalanmanın sönməsi də az rol oynamır [2]. Müxtəlif genişlənmə mexanizmlərinin təhlili göstərir ki, Balmer xətlərinin uzaq qanadlarında sürətli elektronların təsiri də Ştark nəzəriyyəsi ilə yanaşı rol oynayır [1].

Güclü Balmer xətlərinin profillərinin müxtəlif hissələri ulduz atmosferlərinin müxtəlif dərinliklərində yaranır. Ona görə effektiv olaraq onların mərkəzi hissəsi və qanadlarının genişlənməsində müxtəlif effektlər əsas rol oynamalıdır.

Quluzadə [11, 3] ulduz atmosferlərində Fraunhofer xətlərinin genişlənmə mexanizmini və onun xətt daxilində dəyişməsinə tədqiq etmək üçün sadə üsul təklif etmişdir. Bu üsulun mahiyyəti aşağıdakıdan ibarətdir. Məlumdur ki, güclü Fraunhofer xətlərinin uzaq qanadlarında qalıq intensivliyi aşağıdakı empirik düsturla təyin olunur:

$$r(\Delta\lambda) = 1 - \frac{c}{(\Delta\lambda)^n} [1 - R(\Delta\lambda)] \quad (1)$$

Burada $\Delta\lambda$ xəttin mərkəzindən olan məsafə, c -qanad gücü və n -qalıq intensivliyinin $\Delta\lambda$ -dan asılılıq göstəricisidir. Bu ifadəni loqarifmik şəkildə aşağıdakı kimi yazmaq olar.

$$\lg \left[\frac{R(\Delta\lambda / \Delta\lambda_{1/2})}{1 - R(\Delta\lambda / \Delta\lambda_{1/2})} \right] = \lg c - n \lg \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_{1/2}} \right) \quad (2)$$

Düsturda $\Delta\lambda_{1/2}$ profilin yarımənisi. Aydındır ki, $\lg \left[\frac{R(\Delta\lambda / \Delta\lambda_{1/2})}{1 - R(\Delta\lambda / \Delta\lambda_{1/2})} \right]$ -in $\lg \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_{1/2}} \right)$ -dən asılılığı düz xətdir və n onun absis oxuna meyli, $\lg c$ isə onun ordinat oxundan kəsdiyi parçadır.

Prosiyon spektrində H_δ , H_γ və H_β xətləri üçün n -in təyini cədvəl 1-də verilmişdir.

Müşahidə olunmuş profillərə görə müxtəlif $\Delta\lambda$ -lar üçün (2) tənliklər sistemi tərtib olunur və onun ən kiçik kvadratlar üsulu ilə həllindən n və c təyin olunur. Alınmış nəticələr cədvəl 2-də verilmişdir.

Nümunə olaraq şəkil 1-də H_β xətti üçün $\lg \left[\frac{R(\Delta\lambda)}{1-R(\Delta\lambda)} \right]$ -nin $\lg \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_{1/2}} \right)$ -dən asılılığını göstərilməmişdir.

Cədvəl 1

Prosiyon spektrində H_δ , H_γ və H_β xətləri üçün n -in təyini

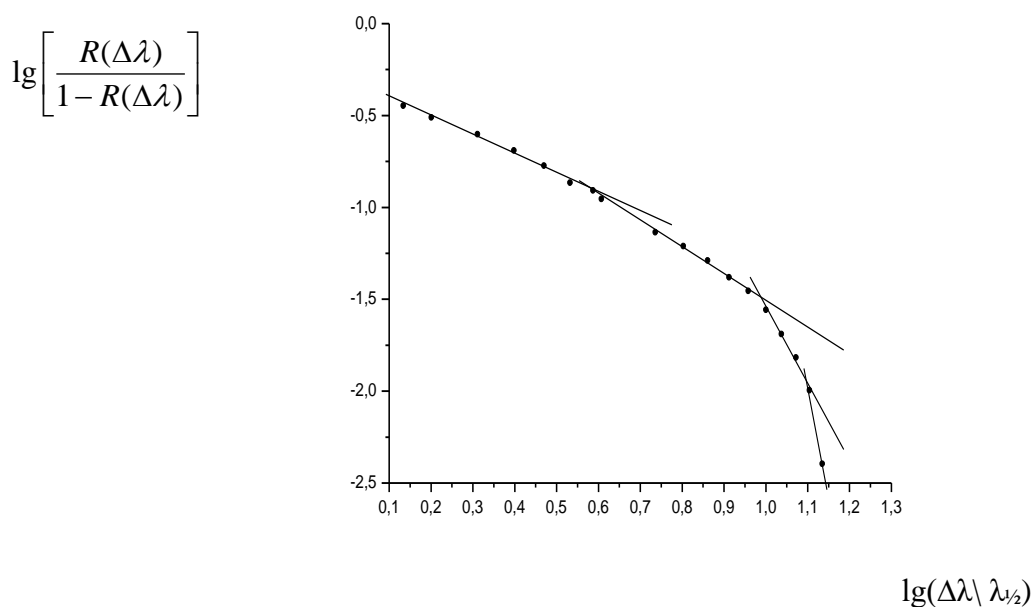
H_β		H_γ		H_δ	
$\lg \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_{1/2}} \right)$	$\lg \left[\frac{R \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_{1/2}} \right)}{1 - R \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_{1/2}} \right)} \right]$	$\lg \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_{1/2}} \right)$	$\lg \left[\frac{R \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_{1/2}} \right)}{1 - R \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_{1/2}} \right)} \right]$	$\lg \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_{1/2}} \right)$	$\lg \left[\frac{R \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_{1/2}} \right)}{1 - R \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_{1/2}} \right)} \right]$
0.134	-0.447	0.049	-0.391	0.029	-0.447
0.201	-0.511	0.117	-0.448	0.152	-0.550
0.311	-0.602	0.173	-0.492	0.207	-0.602
0.398	-0.690	0.225	-0.550	0.292	-0.690
0.470	0.773	0.271	-0.600	0.330	-0.733
0.532	-0.865	0.350	-0.689	0.398	-0.807
0.587	-0.908	0.416	-0.750	0.507	-0.935
0.607	-0.954	0.474	-0.830	0.553	-0.953
0.736	-1.136	0.526	-0.917	0.631	-1.136
0.803	-1.211	0.571	-0.954	0.699	-1.211
0.861	-1.289	0.651	-1.027	0.757	-1.279
0.912	-1.380	0.717	-1.117	0.808	-1.380
0.958	-1.454	0.775	-1.211	0.854	-1.454
1.000	-1.557	0.827	-1.348	0.895	-1.557
1.037	-1.690	0.872	-1.481	0.933	-1.690
1.072	-1.817	0.914	-1.713	0.968	-1.817
1.104	-1.996	0.952	-1.848	1.000	-1.996
1.135	-2.396	0.986	-2.298	1.030	-2.396

Şəkildən görüldüyü kimi $\lg \left[\frac{R(\Delta\lambda)}{1-R(\Delta\lambda)} \right]$ -nin $\lg \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_{1/2}} \right)$ -dən asılılığını ifadə edən xətt bir neçə

dəfə sınır və onun absis oxuna meyli dəyişir. Profilin qanadlarının müxtəlif bölgələrində n müxtəlif qiymətlər alır. Bu o deməkdir ki, spektral xətdə profilin qanadlarının müxtəlif hissələrinin oluşmasında effektiv olaraq müxtəlif mexanizmlər rol oynayır. Məlum olduğu kimi şüalanmanın sönməsi üçün $n = 1$, Ştark effekti üçün isə $n = 2.5$ -dir. Cədvəl 2-dən görüldüyü kimi H_β xətti üçün $\Delta\lambda = 5.5-9.3\text{\AA}$ olduqda $n = 1.6$, $\Delta\lambda = 23.4-31.6\text{\AA}$ olduqda isə $n = 2.9$ olur. Beləliklə H_β xətti üçün Ştark effekti $\Delta\lambda > 23.4\text{\AA}$ olduqda əsas rol oynayır. H_γ xətti üçün isə Ştark effekti $\Delta\lambda > 21.4\text{\AA}$ olduqda əsas rol oynamağa başlayır. H_δ xətti üçün isə Ştark effekti daha yaxın qanadlardan ($\Delta\lambda > 12.8\text{\AA}$) başlayır.

n və c -nin hesablanmış qiymətləri

Spektral xətlər	$\Delta(\lambda)$	n	c
H_β	5.5 ÷ 9.3	1.6	3.9
	9.3 ÷ 23.4	1.8	19.9
	23.4 ÷ 31.6	2.9	-
H_γ	8.5 ÷ 14.8	1.5	3.71
	14.8 ÷ 21.4	2.5	56.23
	21.4 ÷ 26.9	3	23.44



Şəkl. 1. $\lg \left[\frac{R(\Delta\lambda)}{1-R(\Delta\lambda)} \right]$ -nin $\lg(\Delta\lambda \setminus \lambda_{1/2})$ -dən asılılıq qrafiki

ƏDƏBİYYAT

1. Quluzadə C. M. Atom spektroskopiyası. Bakı, Elm, 1985, 217s.
2. Hüseynov R. Ə. Ümumi astrofizika kursu. Bakı, 2010, 367 s.
3. Kuli-Zade D.M. On the fine structure of the weak Fraunhofers line Profiles. Abstract Book of the International Conference "N. Tusi and Modern Astronomy", 2001, p. 21-22, 4-7 October, Pirguli
4. Jager de G., The Hidrogen spectrum of the Sun, Rech. Astr. Obs. Utrecht, part I, p. 1-93, 1952
5. Dravins D., Larsson B. Solar Fell line asymmetries and wavelength shifts. Astron. and Astrophys., 1986, 158, № 1/2, p. 83-88
6. Zelenka A., Synthesis of several Solar Hydrogen lines, Astron. and Astrophys., p.264-275,1981
7. Vernazza J.E., Avrette E.H., Loesser R., Structure of the Solar Chromosphere III. Models of the

- EUV brightness components of the quiet Sun., *Astrophys. J., Suppl. Ser.*, v.45, p. 635-725, 1981
8. Vernazza J.E., Avrette E.H., Loesser R. Structure of the solar chromosphere. III. Models of the EUV brightness components of the quiet sun. *Astrophys. J., Suppl. Ser.*, 1981, v. 45, p. 635-725
 9. Atroshchenko I.N., Gadun A.S., Kostik R.I. Asymmetry of absorption lines in the solar and Procyon spectra. In: *Solar and Stellar Granulation. NATO ASI Series*, 1989, v. 263, p. 135-143
 10. Курочка Л.Н., Контуры линий водорода обусловленные суммарным действием уширяющих факторов, *Изв. Кр.АО*, 38, с.96-119, 1967
 11. Кули-Заде Д.М. Новый эмпирический метод для анализа механизма уширения фраунгоферовых линий, *ДАН Азерб. Республ.* 55, №1-2, 117-120, 1999

ABSTRACT

Mirgasan Tairov

About the broadening of the balmer lines in the spectrum prosiona

As is known, the mechanism of broadening hydrogen lines in stellar atmospheres, is significantly different from the mechanism of broadening of the lines of other elements. If the line broadening metal core role played by radiation damping, the broadening of hydrogen lines occur due to the Stark effect.

The paper examines the role of different mechanisms in the broadening of the Balmer lines in the spectrum Proxima. It is noted that the different fragments strong Balmer line profiles are formed in different depths of stellar atmospheres. Therefore, in the broadening of the central part and wing profiles of these lines acts different mechanisms. It is shown that in the lines H_{β} , H_{γ} and H_{δ} respective ranges ($\Delta\lambda > 23.4\text{\AA}$, $\Delta\lambda > 21.4\text{\AA}$ and $\Delta\lambda > 12.8\text{\AA}$) broadening occur due to the.

РЕЗЮМЕ

Миргасан Таиров

О механизмах уширения бальмеровских линий в спектре просиона

Как известно, механизм уширения водородных линий в атмосферах звезд, существенно отличается от механизма уширения линий других элементов. Если в уширение линии металлов основной ролью играет затухания излучения, то в линиях водорода уширения происходит из-за эффекта Штарка.

В работе исследуется роль разных механизмов в уширение бальмеровских линий в спектре Проксима. Отмечается, что разные фрагменты профилей сильных бальмеровских линий образуются в разных глубинах звездных атмосфер. Поэтому в уширение центральных частях и в крыльях профилей этих линий действуют разные механизмы. Показано, что в линиях H_{β} , H_{γ} и H_{δ} при соответствующих диапазонах ($\Delta\lambda > 23.4\text{\AA}$, $\Delta\lambda > 21.4\text{\AA}$ и $\Delta\lambda > 12.8\text{\AA}$) уширение происходит из-за эффекта Штарка.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə
çara tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

Məqaləni çara təqdim etdi: *Fizika üzrə fəlsəfə doktoru,*
dosent F.Qocayev

ÜMİT KALEMKUŞ

Naxçıvan Dövlət Universiteti

UOT:511.92

YARIMOXDAN DÖRD TƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİYİN REQULYAR HƏLLİ HAQQINDA

Açar sözlər: *Operator-diferensial tənlik, sərhəd məsələsi, requlyar həll, Hilbert fəzası*

Key words: *Operator-differential equation, boundary value problem, requlyar solution, Hilbert space*

Ключевые слова: *операторные дифференциальные операторы, граничная задача, регулярное решение, Гильбертово пространство*

H - separabel hilbert fəzasında, yarımoxda

$$\frac{d^4 u}{dt^4} + \rho(t)A^4 u + \sum_{j=0}^4 A_{4-j} u^{(j)} = f(t), \quad t \in R_+ = (0, \infty) \quad (1)$$

$$u''(0) = 0, \quad u'''(0) = 0 \quad (2)$$

sərhəd məsələsinə baxaq. Burada $f(t)$ və $u(t)$ $R_+ = (0, \infty)$ yarımoxunda sanki hər yerdə təyin edilmiş, qiymətləri isə H Hilbert fəzasından olan vektor-funksiyalardır, törəmələr ümumiləşmiş funksiyalar mənasında başa düşülür, operator əmsallar isə aşağıdakı şərtləri ödəyir:

- 1) A - öz-özünə qoşma müsbət müəyyən, tərsi isə tamam kəsilməz olan operatorudur;
- 2) $\rho(t)$ - skalyar, məhdud və ölçülən funksiyadır: $0 < \alpha \leq \beta(t) \leq \beta$;
- 3) $A_j A^{-j}$ ($j = 0, 4$) operatorları H -da məhduddur.

A operatoru 1) şərtini ödədikdə A^γ ($\gamma \geq 0$) operatorunun təyini oblastı $D(A^\gamma)$ çoxluğu $(x, y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y)$ skalyar hasilinə görə H_γ Hilbert fəzasına çevrilir. $H_0 = H$ qəbul edirik. $L_2(R_+ : H)$ ilə R_+ -da sanki hər yerdə təyin olunmuş, qiymətləri H -da olan və kvadratı ilə inteqrallanan bütün $f(t)$ vektor funksiyalarının Hilbert fəzasını işarə edək, belə ki,

$$\|f\|_{L_2(R_+ : H)} = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Daha sonra [1] monoqrafıyasına əsasən

$$W_2^4(R_+ : H) = \left\{ u : u^{(4)} \in L_2(R_+ : H), A^4 u \in L_2(R_+ : H) \right\}$$

Hilbert fəzasını təyin edək. Burada norma

$$\|u\|_{W_2^4(R_+ : H)} = \left(\|u^{(4)}\|_{L_2(R_+ : H)}^2 + \|A^4 u\|_{L_2(R_+ : H)}^2 \right)^{1/2}$$

kimi təyin olunur.

$W_2^4(R_+ : H)$ ilə $W_2^4(R_+ : H)$ -in aşağıdakı alt fəzasını (tam) işarə edək

$$W_2^0(R_+ : H) = \{u : u \in W_2^4(R_+ : H), u''(0) = 0, u'''(0) = 0\}$$

Tərif. İstənilən $f(t) \in L_2(R_+ : H)$ üçün elə $u(t) \in W_2^4(R_+ : H)$ varsa ki, (1) tənliyini sanki hər yerdə ödəyir, (2) sərhəd şərtini isə

$$\lim_{t \rightarrow +0} \|u''(t)\|_{3/2} = 0 \quad \lim_{t \rightarrow +0} \|u'''(t)\|_{1/2} = 0$$

mənada ödəyir və onun üçün

$$\|u\|_{W_2^4(R_+ : H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(R_+ : H)}$$

qiymətləndirməsi doğrudursa, onda deyilir ki, (1), (2) məsələsi requlyar həll olunandır.

Bu məqalədə biz (1) tənliyinin əmsalları olan operatorların üzərinə elə kafi şərtlər tapacağıq ki, bu şərtlər daxilində (1), (2) məsələri requlyar həll olunan olacaq.

Qeyd edək ki, $\rho(t) = 1$ olduqda bu məsələyə [2] işində $\rho(t) = \alpha$, $0 < t < t_0$; $\rho(t) = \beta$, $t_0 < t < \infty$ olduqda [3] işində baxılmışdır. Daha yüksək tərtiblər üçün $\rho(t)$ yalnız iki qiymət aldıqda [4]-də baxılmışdır. Bu işdə isə $\rho(t)$ -dən yalnız məhdudluq və ölçülənlik tələb olunur. Bu halda [5] işində başqa bir sərhəd məsələsi öyrənilmişdir.

(1), (2) məsələsinin requlyar həll olunmasını tədqiq etmək üçün aşağıdakı operatorlara baxaq.

$$P_0 u = P_0 (d/dt)u = u^{(4)} + \rho(t)A^4 u, P_1 u = P_1 (d/dt)u = \sum_{j=0}^4 A_{4-j} u^{(j)}$$

$$Pu = P_0 u + P_1 u, u \in W_2^0(R_+ : H).$$

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 1. P_0 operatoru $W_2^0(R_+ : H)$ və $L_2(R_+ : H)$ arasında izomorfizim yaradır.

İsbatı: Biz (1), (2) məsələsini $A_j = 0$ ($j = \overline{0,4}$) olduqda

$$l_k u = u_k^{(4)} + \rho(t)\lambda_k^4 u_k = f_k, k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

$$u''(0) = u'''(0) = 0, k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Sistem şəklində yazıla bilər. Burada $Ae_k = \lambda_k e_k$, $k = \overline{1, \infty}$, $(e_k, e_j) = \delta_{k,j}$, $\delta_{k,j} = 1$, ($k = j$ olduqda), $\delta_{k,j} = 0$ ($k \neq j$ olduqda), $f_k = (f(t), e_k)$, $u_k = (u(t), e_k)$. Aydındır ki, $e_k u$ diferensial ifadəsi və (4) sərhəd şərtləri $L_2(R_+ : H)$ fəzasında təyin oblastı

$u \in W_2^0(R_+ : H) = \{u_k, u_k''' - \text{mütləq kəsilməzdir}, u_k''(0) = u_k'''(0) = 0 \text{ və } l_k u \in L_2(R)\}$ öz-özüne qoma L_k operatoru törədir. Qeyd edək ki, $u_k = (u(t), e_k)$, $f_k = (f(t), e_k)$ -dir.

Onda

$$(L_k u_k, u_k)_{L_2(R)} = (u_k^{(4)}, u_k)_{L_2(R)} + (\rho(t)\lambda_k^4 u_k, u_k)_{L_2(R)} \geq \|u_k''\|_{L_2(R)}^2 + \alpha \lambda_k^4 \|u_k\|_{L_2(R)}$$

olduğundan L_k həm də müsbət müəyyən operatorudur. Onda $u_k = L_k^{-1} f_k$ və

$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k \in W_2^0(R_+ : H)$. Aydındır ki, (2) sərhəd şərtlərini ödəyir və

$$\|u\|_{W_2^4(R_+ : H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(R_+ : H)}.$$

Teorem isbat olundu.

Teorem 2. İstənilən $u \in W_2^4(R_+ : H)$ aşağıdakı qiymətləndirmələr doğrudur.

$$\|A^{4-j}u^{(j)}\|_{L_2(R_+ : H)} \leq c_j \|P_0u\|_{L_2(R_+ : H)}, \quad j = \overline{0,4} \quad (5)$$

belə ki, $c_0 = \alpha^{-1}$, $c_1 = \alpha^{-3/4}$, $c_2 = 2^{-1}\alpha^{-1/2}$, $c_3 = 2^{-1/2}\alpha^{-1/2} \cdot \beta^{1/4}$, $c_4 = \alpha^{-1/2} \cdot \beta^{1/2}$.

İsbati: $P_0u = f$ tənliyindən.

$$\|\rho^{-1/2}P_0u\|_{L_2(R_+ : H)}^2 = \|\rho^{-1/2}u^{(4)}\|_{L_2(R_+ : H)}^2 + \|\rho^{-1/2}A^4u\|_{L_2(R_+ : H)}^2 + 2\|A^2u''\|_{L_2(R_+ : H)}^2 \quad (6)$$

alırıq. Buradan alırıq ki,

$$\|A^4u\|_{L_2(R_+ : H)} \leq \alpha^{-1/2}\|\rho^{1/2}A^4u\|_{L_2(R_+ : H)} \leq \alpha^{-1}\|P_0u\|_{L_2(R_+ : H)} \quad (7)$$

və

$$\begin{aligned} \|u^{(4)}\|_{L_2(R_+ : H)} &\leq \beta^{1/2}\|\rho^{-1/2}u^{(4)}\|_{L_2(R_+ : H)} \leq \beta^{1/2}\|\rho^{-1/2}P_0u\|_{L_2(R_+ : H)} = \\ &= \beta^{1/2}\alpha^{-1/2}\|P_0u\|_{L_2(R_+ : H)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Digər tərəfdən hissə - hissə inteqrallasaq alırıq:

$$\|A^2u''\|_{L_2(R_+ : H)}^2 \leq (u^{(4)}, A^4u)_{L_2(R_+ : H)} \leq \frac{1}{2}\left(\|\rho^{-1/2}u^{(4)}\|_{L_2(R_+ : H)} + \|\rho^{-1/2}A^4u\|_{L_2(R_+ : H)}\right)$$

Onda (6)- dan alırıq ki,

$$\|A^2u''\|_{L_2(R_+ : H)}^2 \leq \frac{1}{4}\|\rho^{1/2}P_0u\|_{L_2(R_+ : H)}^2 \leq \frac{1}{4}\alpha^{-1}\|P_0u\|_{L_2(R_+ : H)}^2$$

və ya

$$\|A^2u''\|_{L_2(R_+ : H)} \leq 2^{-1}\alpha^{-1/2}\|P_0u\|_{L_2(R_+ : H)} \quad (9)$$

(9) və (8) dən alırıq ki,

$$\begin{aligned} \|A^2u''\|_{L_2(R_+ : H)}^2 &\leq |(A^2u'', u^{(4)})_{L_2(R_+ : H)}| \leq \|A^2u''\|_{L_2(R_+ : H)} \cdot \|u^{(4)}\|_{L_2(R_+ : H)} \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\alpha^{-1/2} \cdot \beta^{1/2}\alpha^{-1/2}\|P_0u\|_{L_2(R_+ : H)}^2 \leq \frac{1}{2}\alpha^{-1} \cdot \beta^{1/2}\|P_0u\|_{L_2(R_+ : H)}^2, \end{aligned}$$

Yəni

$$\|A^2u''\|_{L_2(R_+ : H)} \leq 2^{-1/2}\alpha^{-1/2} \cdot \beta^{1/4}\|P_0u\|_{L_2(R_+ : H)}. \quad (10)$$

Digər tərəfdən

$\tau = \|A^2u'\|_{L_2(R_+ : H)}^{1/2} \cdot \|A^4u\|_{L_2(R_+ : H)}^{1/2}$ olduqda

$$\begin{aligned} &\|\eta A^4u + A^3u' + \eta^{-1}A^2u''\|_{L_2(R_+ : H)}^2 + \|A^3u'\|_{L_2(R_+ : H)}^2 + \\ &+ \|\eta^{1/2}A^{7/2}u(0) + \tau^{-1/2}A^{5/2}u(1)\|_{L_2(R_+ : H)}^2 \end{aligned}$$

bərabərliyindən alınır ki,

$$\begin{aligned} \|A^3 u'\|_{L_2(R_+;H)}^2 &\leq 2 \|A^4 u\|_{L_2(R_+;H)} \cdot \|A u''\|_{L_2(R_+;H)} \leq 2 \cdot \frac{1}{2} \alpha^{-1/2} \cdot \alpha^{-1} \|P_0 u\|_{L_2(R_+;H)} = \\ &= \alpha^{-3/2} \|P_0 u\|_{L_2(R_+;H)} \end{aligned}$$

Yəni

$$\|A^3 u'\|_{L_2(R_+;H)} \leq \alpha^{-3/4} \|P_0 u\|_{L_2(R_+;H)} \quad (11)$$

(7) – (11) bərabərsizlikləri teoremin doğru olduğunu göstərir.

İndi əsas teoremi isbat edək.

Teorem 3. Tutaq ki, (1) tənliyinin əmsalları 1) – 3) şərtlərini ödəyir, $A_j, j = \overline{0,4}$ operatorları elədir ki, onlar üçün

$$q = \sum_{j=0}^4 c_j \|B_{4-j}\| < 1 \quad (B_j = A_j A^{-j})$$

Burada c_j ($j = \overline{0,4}$) əmsalı teorem 2 –dən təyin olunur.

Bərabərsizliyi doğrudur. Onda (1), (2) məsələsi requlyar həll olunandır.

İsbatı: (1), (2) məsələsini $Pu = f$ tənliyi kimi yazaq. Onda $P_0 u + P_1 u = f$ olar. Burada $u \in W_2^4(R_+; H)$, $f(t) \in L_2(R_+; H)$. Teorem 1 -ə görə P_0^{-1} var və o, $L_2(R_+; H)$ -dan $W_2^4(R_+; H)$ -a məhduddur. Onda $P_0 u = \omega$ qəbul etsək $\omega + P_1 P_0^{-1} \omega = f$ kimi $L_2(R_+; H)$ -də tənlik alırıq. Lakin

$$\|P_1 P_0^{-1} \omega\|_{L_2(R_+;H)} \leq \sum_{j=0}^4 \|A_{4-j} u^{(j)}\|_{L_2(R_+;H)} \leq \sum_{j=0}^4 \|B_{4-j}\| \cdot \|A_{4-j} u^{(j)}\|_{L_2(R_+;H)}$$

Digər tərəfdən burada teorem 2- ni nəzərə alsaq

$$\|P_1 P_0^{-1} \omega\|_{L_2(R_+;H)} \leq \sum_{j=0}^4 c_j \|B_{4-j}\| \|P_0 u\|_{L_2(R_+;H)} = \left(\sum_{j=0}^4 c_j \|B_{4-j}\| \|\omega\|_{L_2(R_+;H)} = q \|\omega\|_{L_2(R_+;H)} \right)$$

alırıq. Lakin $q < 1$ olduqda fəzasında $E + P_1 P_0^{-1}$ operatorunun məhdud tərsi var. Deməli

$$\omega = (E + P_1 P_0^{-1})^{-1} f. \text{ Onda } u = P_0^{-1} (E + P_1 P_0^{-1})^{-1} f \text{ və } \|u\|_{W_2^4(R_+;H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(R_+;H)}$$

Teorem isbat olundu.

ƏDƏBİYYAT

1. Лионс Ж.Л., Мадженес Д. Неоднородные граничные задачи и их приложение. М. Мир, 1971, 371 с.
2. Mirzoyev S.S., Baqirova S.M. On solability of one class nonlocal boundary value problem for the fourth order in Hilbert spaces // Applied mathematical sciences. v.7, 2013, N:9-11, p.2923-2934
3. Алиев А.Р. Краевы задач для одного класса операторно- дифференциальных уравнений вышнего порядка с переменными коэффициентами // Матем. Заметки, 2003, т.74, N:6, с. 803-817
4. Алиев А.Р, Мирзоев С.С. К теории разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка // Функциональный анализ и его приложения, 2010, т.44, №:3,стр.63-65

5. Mirzoyev S.S., U.O. Kalemkuş On the solvability of a boundary value problem of fourth order in Hilbert spaces // Applied Mathematical Sciences, v. 9, 2015, No 128, pp. 6391-6395.

ABSTRACT

Umit Kalemkuş

On the regular solution of the fourth order operator-differential equation in semi axis

In the article is found out the sufficient conditions that regular solvability of one class boundary value problems for the fourth order operator-differential equations in the semi axis in the Hilbert space. These conditions are expressed in terms of the properties of coefficients of operator-differential equations at the same time, the norms of the operators intermediate derivatives are estimated in the same abstract Sobolev type space and their relation to the problem regular solvability of the conditions boundary value problem.

РЕЗЮМЕ

Умит Калемкуш

О регулярной решимости операторно-дифференциального уравнения в полуоси

В статье получены достаточные условия на коэффициенты операторно-дифференциального уравнения четвертого порядка в Гильбертовом пространстве, которые обеспечивают регулярную разрешимость одной краевой задачи для операторно-дифференциального уравнения четвертого порядка. Эти условия даны на теореме свойства коэффициентов операторно-дифференциального уравнения. Здесь также оценены нормы операторов промежуточных производных в некоторых абстрактных пространствах Соболева и связаны с условиями регулярной разрешимости краевой задачи.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə çapa tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

Məqaləni çapa təqdim etdi: *Fizika üzrə fəlsəfə doktoru, dosent F.Qocayev*

FİZİKA

MƏMMƏD HÜSEYNƏLİYEV

AMEA Naxçıvan Bölməsi

E-mail: mamedhuss@mail.ru

MÜBARİZ NURİYEV

Naxçıvan dövlət Universiteti

mubariznuri@mail.ru

UOT: 537. 533. 3

YARIMKEÇİRİCİLƏRDƏ KRİTİK NÖQTƏLƏRİN MÜXTƏLİF HALLARI ÜÇÜN KOMPLEKS DIELEKTRİK FUNKSİYASININ ENERJİDƏN ASILILIQ ƏYRİLƏRİNİN MÜQAYİSƏSİ

Açar sözlər: *yarımkeçirici, kritik nöqtə, "Graphical analysis", fitting, kompleks dielektrik funksiyası, həqiqi hissə, xəyali hissə, parametr, RMSE, orta kvadratik xəta.*

Ключевые слова: *полупроводник, критическая точка, "Graphical analysis", фиттинг, комплексная диэлектрическая функция, действительная часть, мнимая часть, параметр, RMSE, средне-квадратичная ошибка.*

Keywords: *semiconductor, critical point, "Graphical analysis", fitting, complex dielectric function, real part, imaginary part, parameter, RMSE, mean-square error.*

Yarımkeçiricilər fizikasında yarımkeçiricinin kritik nöqtələrinin təyini əsas məsələdir. Spektroskopik ellipsometriya ölçmələri bu nöqtələri təyin etməyə imkan verən tədqiqat üsullarından biridir.

Ellipsometrik ölçmələrdən nəticə olaraq ε kompleks dielektrik funksiyasının ε_1 həqiqi və ε_2 xəyali hissələrinin enerjidən asılılıq qrafikləri alınır. Bu funksiya həm də 700-dən çox nöqtənin asılılığı şəklində rəqəmsal olaraq koordinatlarla verilmiş olur və ona görə də bu asılılığı asanlıqla hər hansı bir proqramda qurmaq və analizini aparmaq mümkündür. Bir çox müəlliflər fitting prosesini yerinə yetirərkən çox mürəkkəb hesablamalardan, Savitski-Golay alqoritmlərindən, SA alqoritmlərindən [1-3], və s. istifadə etmişlər.

Halbuki "Graphical analysis" proqramı bu məqsəd üçün çox əlverişli bir proqramdır. Ona görə ki, əvvəla bu proqramla koordinatlarla verilmiş eksperimental əyri qurmaq mümkündür. Bu asılılığın birinci, ikinci tərtib törəmələrini çox asanlıqla almaq mümkündür və nəhayət həmin əyrinin və yaxud onun müəyyən oblastının fittingini aparmaq (yəni həmin əyri ilə maksimum üst-üstə düşə bilən nəzəri asılılıqları müəyyən etmək) mümkündür. Konkret olaraq spektroskopik ellipsometriya məsələlərinin həlli zamanı eksperimental kompleks dielektrik funksiyası $\varepsilon(\omega)$ -nın ikinci tərtib törəmələrinin həqiqi və xəyali hissələri üçün aldığımız asılılıqların fittingi belə məsələlərin həllində istifadə olunan nəzəri funksiyaların vasitəsilə aparılır. Nəticədə bu funksiyalara daxil olan sabitlər təyin olunur. Bu sabitlərdən biri də E - kritik nöqtəsidir ki, bu da yarımkeçiricilər nəzəriyyəsi üçün çox mühüm kəmiyyətdir.

Bu proqramın üstünlükləri barədə əvvəlki işlərimizdə məlumat verilmişdir [4,5].

Bu məqalədə yarımkeçiricilərdə kritik nöqtələrin müxtəlif halları üçün (dörd halı üçün) kompleks dielektrik funksiyasının enerjidən asılılıq qiymətlərinin müqayisəli təhlili verilmişdir.

Məsələnin qoyuluşu

Bildiyimiz kimi kompleks dielektrik funksiyası üçün nəzəri analitik ifadə $m \neq 0$ halı üçün aşağıdakı şəkildədir [6,7]:

$$\varepsilon(\omega) = C - Ae^{i\theta} (\omega - E + i\Gamma)^m \quad (1)$$

burada A-amplituda, E-kritik nöqtə, Γ - genişlənmə, θ -isə eksiton faza bucağıdır.

İfadəyə daxil olan m kəmiyyəti dörd müxtəlif qiymət ala bilər: $m = \frac{1}{2}$ kritik nöqtənin üçölçülü (3D) halına aiddir; $m = 0$ kritik nöqtənin ikiölçülü (2D) halına aiddir; $m = -\frac{1}{2}$ kritik nöqtənin birölçülü (1D) halına aiddir; $m = -1$ isə eksiton tip kritik nöqtədir [8]. $m = 0$ halı üçün (1) ifadəsi aşağıdakı kimi olur:

$$\varepsilon(\omega) = C - Ae^{i\theta} \ln(\omega - E + i\Gamma) \quad (2)$$

Lakin (1) və (2) funksiyalarına daxil olan parametrləri təyin etmək üçün (eləcə də C parametrini aradan qaldırmaq üçün) $\varepsilon(\omega)$ dielektrik funksiyasının eksperimental qiymətlərinin ikinci tərtib diferensiallanmasından alınan $\frac{d^2\varepsilon}{d\omega^2}$ funksiyasından istifadə etmək lazım gəlir.

Bu halda (1) və (2) funksiyalarının ikinci tərtib törəmələri $m \neq 0$ halı üçün

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\omega^2} = -m(m-1)Ae^{i\theta}(\omega - E + i\Gamma)^{m-2} \quad (3)$$

və ya triqonometrik formada yazsaq

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\omega^2} = A^1(\Omega)^{m-2/2} \left\{ \cos \left[(m-2) \arg \cos \left(\frac{\omega - E}{\Omega^{1/2}} \right) + \theta \right] + i \sin \left[(m-2) \arg \sin \left(\frac{\omega - E}{\Omega^{1/2}} \right) + \theta \right] \right\} \quad (4)$$

olacaqdır, burada $A^1 = -m(m-1)A$ və $\Omega = (\omega - E)^2 + \Gamma^2$.

$m = 0$ halı üçün

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\omega^2} = Ae^{i\theta}(\omega - E + i\Gamma)^{-2} \quad (5)$$

və triqonometrik formada

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\omega^2} = \frac{A}{\Omega} \left\{ \cos \left[-2 \arg \cos \left(\frac{\omega - E}{\Omega^{1/2}} \right) + \theta \right] + i \sin \left[-2 \arg \sin \left(\frac{\omega - E}{\Omega^{1/2}} \right) + \theta \right] \right\} \quad (6)$$

Fitting apararkən triqonometrik formada yazılmış (4) ($m \neq 0$ olduqda) və ya (6) ($m = 0$ olduqda) funksiyasının həqiqi $d^2\varepsilon_1(\omega)/d\omega^2$ və xəyali $d^2\varepsilon_2(\omega)/d\omega^2$ komponentləri istifadə olunur. A, E, Γ və θ -parametrləri (4) və (6) funksiyalarının gedişinə aşağıdakı kimi təsir göstərir:

A parametri $d^2\varepsilon_1(E)/dE^2$ və $d^2\varepsilon_2(E)/dE^2$ asılılıqlarının qarşılıqlı vəziyyətinə, onların fiksə olunduğu yerə və maksimumların yarım eninə təsir göstərmir, yalnız asılılığın amplituduna təsir edir. A parametri artıqca amplitud da artır.

E (kritik nöqtə) parametri də $d^2\varepsilon_1(E)/dE^2$ və $d^2\varepsilon_2(E)/dE^2$ asılılıqlarının qarşılıqlı vəziyyətinə, maksimumların qiymətinə və yarım eninə heç bir təsir göstərmir, yalnız bu asılılıqları absis oxu (enerji) boyunca sürüşdürür və enerjinin verilmiş qiymətinə uyğun yerdə fiksə olunur.

Γ (genişlənmə) parametri də kompleks dielektrik funksiyasının həqiqi və xəyali hissələrinin ikinci tərtib törəmələrinin enerjiden asılılıqlarının qarşılıqlı vəziyyətinə, onların fiksə olunduğu yerə heç bir təsir göstərmir. Adından da görüldüyü kimi bu parametr asılılıqlardakı maksimumların yarım eninin dəyişməsinə səbəb olur. Bundan başqa Γ həm də maksimumların boyuna təsir edir. Γ artıqca amplitud azalır.

θ (faza) parametrinin dəyişməsi maksimumların qiymətinə, onların yarım eninə və fiksə olunduğu yerə təsir göstərmir. Lakin bu parametr nəinki $d^2\varepsilon_1(E)/dE^2$ və $d^2\varepsilon_2(E)/dE^2$ asılılıqlarının qarşılıqlı vəziyyətinə birbaşa təsir göstərir, həm də onların formalarını tamamilə

dəyişdirir. Ona görə də (4) və (6) analitik nəzəri funksiyalarla fitting aparılarkən ilk növbədə onların θ (faza) parametrinə uyğun forma dəyişikliklərinə görə müqayisəsi aparılmalıdır.

Nəticələr və onların müzakirəsi: m -parametrinin nəzəri funksiyanın gedişinə təsiri

Yuxarıda qeyd olunduğu kimi $d^2\varepsilon_1(\omega)/d\omega^2$ və $d^2\varepsilon_2(\omega)/d\omega^2$ əyriləri fittingə cəlb olunarkən ən yaxşı fitting halı üçün A, E, Γ və θ -parametrlərindən əlavə həm də m sabitinin ala biləcəyi dörd qiymətdən birinin seçilməsi ilə müəyyən olunur. Fitting apararkən bu sabitlərdən hər hansı birinin seçilməsi həmin sabitin digər üç sabitlə müqayisədə eksperimental asılılıqla daha çox üst-üstə düşməsi, yəni fitting xətasının daha kiçik olması ilə müəyyən olunur ki, bu xəta "Graphical analysis" proqramında RMSE (orta kvadratik xəta) göstəricisi ilə qiymətləndirilir.

m -in müxtəlif qiymətləri ilə aparılan fittinglər bir-birlərindən nə qədər xəta ilə fərqlənirlər?

Bu suala cavab vermək üçün xüsusi olaraq $m = 0$ qiyməti üçün təxminən 100%-li fittingi mümkün olan eksperimental $d^2\varepsilon_1(\omega)/d\omega^2$ və $d^2\varepsilon_2(\omega)/d\omega^2$ əyriləri qurulmuş və həmin asılılıqların m -in digər qiymətləri ilə fittingi aparılaraq alınan RMSE xətaları müəyyən edilmişdir. Fitting əyrilərindən görüldüyü kimi m -in müxtəlif qiymətlərində A, E, Γ və θ -parametrlərindən yalnız demək olar ki, E-parametri dəyişməz qalır, yəni m -in müxtəlif qiymətlərində aparılan fitting kritik nöqtələrin qiymətinin tapılmasına təsir etmir. Bu nəticəni fitting prosesinin ən uğurlu xüsusiyyəti hesab etmək olar.

Orta kvadratik xətalara isə $m = 0$ qiyməti ilə müqayisədə bir-birlərindən çox da fərqlənmirlər (cədvəl 1).

Cədvəl 1

m	0	-1	-0.5	0.5
RMSE (həqiqi hissə)	0,071	1,394	0,9322	1,331
RMSE (xəyali hissə)	0,1254	1,557	0,7874	1,607

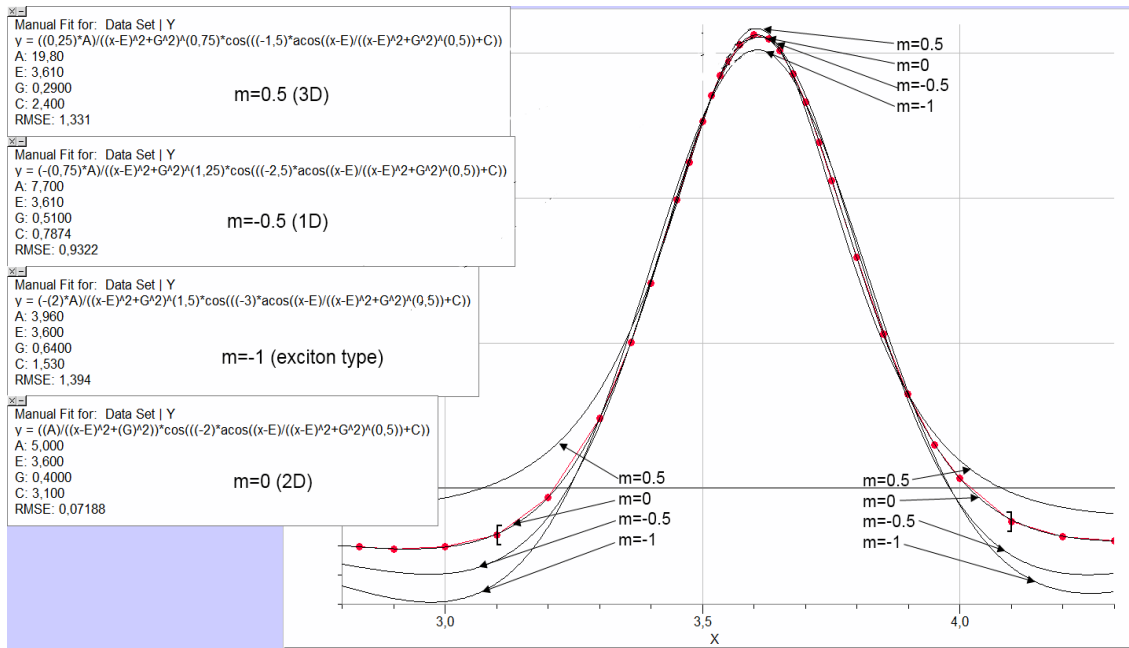
Ən böyük xəta üçölçülü $m = 0,5$ (3D) parametrlərinə aid olan fitting ilə $m = -1$ (eksiton tip kritik nöqtə) parametrlərinə aid olan fitting halları arasında olur. Bu fittinglər arasındakı orta kvadratik xəta (RMSE_{0,5;-1}) onların $m = 0$ qiyməti ilə müqayisədə aldıkları xəta (RMSE_{0,5;0} və RMSE_{-1;0}) qiymətlərinin toplanması ilə alınır.

$$\text{RMSE}_{0,5;-1} (\text{həqiqi hissə}) = \text{RMSE}_{0,5;0} + \text{RMSE}_{-1;0} = 1,331 + 1,394 = 2,725$$

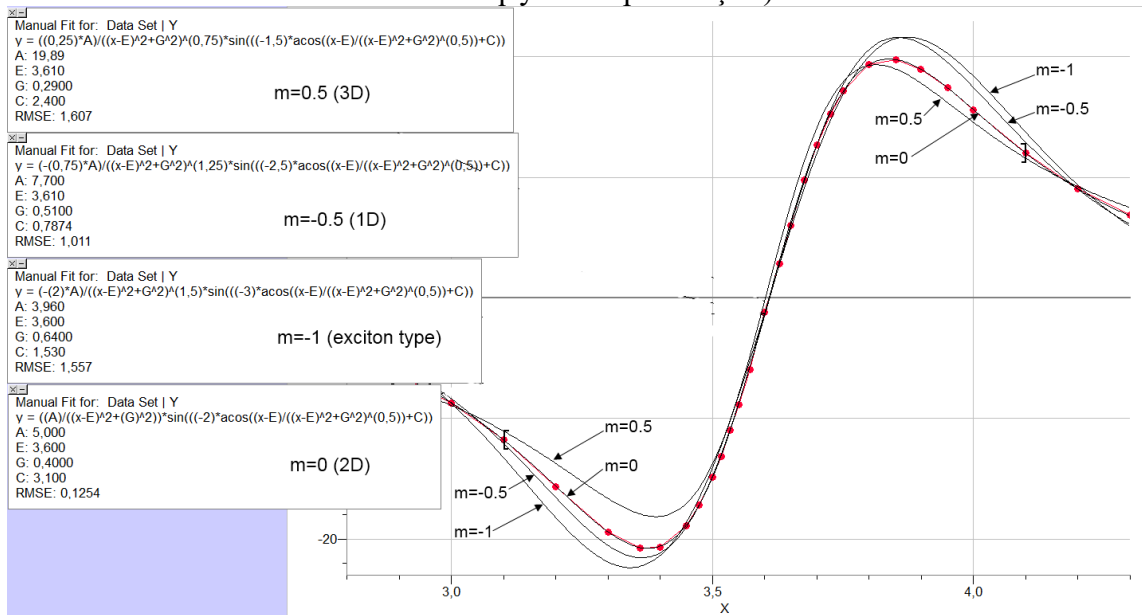
$$\text{RMSE}_{0,5;-1} (\text{xəyali hissə}) = \text{RMSE}_{0,5;0} + \text{RMSE}_{-1;0} = 1,607 + 1,557 = 3,164$$

Burada bir məsələni də xüsusi olaraq qeyd etmək lazımdır ki, hər hansı bir konkret eksperimental $d^2\varepsilon_1(\omega)/d\omega^2$ və $d^2\varepsilon_2(\omega)/d\omega^2$ əyrilərinin m -in müxtəlif qiymətlərində fitting nəticəsində A, E, Γ və θ -parametrlərinin müxtəlif qiymətlər alması təbiidir. Lakin bu zaman θ -nın aldığı qiymətlər arasında müəyyən bir qanunauyğunluq vardır. Belə ki, m -in $m = -\frac{1}{2}$, $m = -1$, $m = \frac{1}{2}$ və $m = 0$

qiymətləri üçün aparılan fitting nəticəsində θ -nın aldığı qiymətlər uyğun olaraq bir-birlərini $\pi/4$ bucağı qədər qabaqlayırlar. Məsələn şəkil 1 və 2-də fittinglər θ -nın aşağıdakı qiymətlərində alınmışdır (cədvəl 2):



Şəkil 1. "Graphical analysis" proqramı əsasında m -in müxtəlif qiymətləri üçün kompleks dielektrik funksiyasının həqiqi hissəsinin ikinci tərtib törəməsinin enerjidən asılılıq əyriləri (fitinqlər $m = 0$ halı ilə müqayisədə aparılmışdır).



Şəkil 2. "Graphical analysis" proqramı əsasında m -in müxtəlif qiymətləri üçün kompleks dielektrik funksiyasının xəyali hissəsinin ikinci tərtib törəməsinin enerjidən asılılıq əyriləri (fitinqlər $m = 0$ halı ilə müqayisədə aparılmışdır).

Cədvəl 2

m parametrinin qiymətləri	$m = -\frac{1}{2}$ (1D)	$m = -1$ eksiton tip kritik nöqtə	$m = \frac{1}{2}$ (3D)	$m = 0$ (2D)
θ parametrinin aldığı qiymətlər	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π

ƏDƏBİYYAT

1. León, M., Serna, R., Levchenko, S., Nateprov, A., Nicorici, A., Merino, J. M. and Arushanov, E. Modeling the optical constants of $\text{Cu}_2\text{In}_4\text{Se}_7$ and CuGa_3Se_5 crystals. // J. Appl. Phys., 2007, vol. 101, p. 013524
2. Corana, M., Marchesi, C., Martini, and Ridella, S. Minimizing multimodal functions of continuous variables with the "Simulated annealing" algorithm. // ACM Transactions on Mathematical Software, 1987, vol. 13, No. 3, p. 262-280
3. Кардона, М. Модуляционная спектроскопия. Москва: Мир, 1972, 416 с.
4. Hüseynəliyev M.H., Əhmədov O.R., Abdullayeva N.M., Xəlilova X.N., Qasimov N.A. Spektroskopik ellipsometriya ölçmələrinin tədqiqində "Graphical analysis" proqramının tətbiqinin üstünlükləri // Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının Xəbərləri, 2015 №5 s.100-103
5. Hüseynəliyev M.H. Qurğuşun sulfid monokristallarının dielektrik xassələri və kritik nöqtələrinin təyini // AMEA Naxçıvan Bölməsi, "Xəbərlər", 2016, №4. s. 240-246
6. Albornoz J.G., Serna R., Leon M. Optical properties and electronic structure of polycrystalline $\text{Ag}_{1-x}\text{Cu}_x\text{InSe}_2$ alloys // J. Appl. Phys. 97, (2005), p.103515 (1-7)
7. Choi S.G., Zhao H.Y., Persson C. Dielectric function spectra and critical point energies of $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$ from 0,5 to 9,0 eV // J. Appl. Phys. 111, (2012), p.033506 (1-6)
8. Lautenschlager P., Garriga M., Logothetidis S., and Cardona M. Interband critical points of GaAs and their temperature dependence // Phys. Rev. B, 35, (1987), p.9174

ABSTRACT

Mammad Huseynaliyev, Mubariz Nuriyev

A comparison of the curves of the dependence of the complex dielectric function on the energy for different states of the critical points in semiconductors

The paper gives a comparative analysis of the curves of the dependence of the complex dielectric function on the energy for different states of critical points in semiconductors. The analysis was carried out with the help of the program "Graphical analysis" for four values of the parameter m -characterized states of critical points. The difference in dependencies between each other is estimated using a mean-square error (RMSE), which is built into the program itself. It is established that these dependences differ little from each other and the biggest difference exists between the fittings for the parameters $m = 0,5$ (3D) and $m = -1$ (the exciton type of the critical point), which is $\text{RMSE} = 3,164$ for 24 points. For different values of m the parameters A , E , Γ and θ remains unchanged, i.e. Different values m do not affect the determination of critical point values.

РЕЗЮМЕ

Мамед Гусейналиев, Мубариз Нуриев

Сравнение кривых зависимости комплексной диэлектрической функции от энергии для разных состояний критических точек в полупроводниках

В работе дан сравнительный анализ кривых зависимости комплексной диэлектрической функции от энергии для разных состояний критических точек в полупроводниках. Анализ проведен с помощью программы "Graphical analysis" для четырех значений параметра m - характеризующихся состояний критических точек. Различие зависимостей друг от друга оценено с помощью средне-квадратичной ошибки (RMSE), которая встроена в саму программу. Установлено, что эти зависимости мало отличаются друг от друга и самая большая разница существует между фиттингами для параметров $m = 0,5$ (3D) и $m = -1$ (экситонный тип критической точки), которая составляет для 24 точек $\text{RMSE} = 3,164$. Для разных значений m из параметров A , E , Γ и θ только E остается неизменным, т.е. разные значения m не влияют на нахождение значений критических точек.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə çapa tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

MAFTUN ISMAILOV
 "Nakhchivan" University
 imeftun@yahoo.com
 ELSHAN MAMMADOV
 Nakhchivan State University
 elsheninfo@mail.ru

UOT: 681.5.034

**ON THE INFLUENCE OF THE MATERIAL PROPERTIES
 ON THE FREQUENCY RESPONSE OF THE PLATE-LAYER LOADED
 WITH A COMPRESSIBLE VISCOUS FLUID**

Açar sözlər: *Amplitud-tezlik asılılığı, sıxılabilən özlü maye, elastik lövhə, mayenin xassələri*

Key words: *Frequency response, elastic plate, compressible viscous fluid, fluid properties*

Ключевые слова: *амплитудно-частотные характеристики, упругая пластина, сжимаемая вязкая жидкость, свойства жидкости*

1. Introduction

The review of investigations related to the vibration of plate + fluid systems was made in papers [1, 2] and it was noted therein that until recently there was not any study in this field made within the utilizing of the linearized exact equations of motion. In the mentioned sense the first attempts were made namely in the papers [1, 2] in which the frequency response of the system consisting of the elastic [1] and viscoelastic [2] plate and the half-plane occupied with compressible viscous fluid was studied. Under these studies the equations of motion for the plate were written by utilizing the exact linearized equations of elastodynamics and the equations of motion of the fluid were written by utilizing the linearized Navier - Stokes equations.

However, in the papers [1] and [2] concrete results are presented and discussed for the Steel and Glycerin (in [1]) and for the Plexiglas and Glycerin (in [2]). Consequently, the question how properties of the plate and fluid materials act on the frequency response of the the hydro-elastic system under consideration, arises. Namely this question will be studied in the present paper.

2. Formulation of the problem and solution method

Consider a system consisting of the plate-layer and half-plane filled with a barotropic compressible Newtonian viscous fluid. We associate the coordinate system $Ox_1x_2x_3$ with the plate and the position of the points of the constituents we determine in this coordinate system. Assume that the plate occupies the region $\{|x_1| < \infty, -h < x_2 < 0\}$, but the fluid occupies the region $\{|x_1| < \infty, -\infty < x_2 < -h\}$. Within this, we consider a motion of the system under consideration in the case where the lineal-located time-harmonic force acts on the free face plane of the plate-layer. Assume that the plane-strain state in the plate and the two-dimensional flow of the fluid take place in the Ox_1x_2 plane.

The equations of the plate we take within the scope of the linear theory of elastodynamics, i.e., as follows:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \sigma_{11}^0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}.$$

$$\sigma_{11} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{11}, \quad \sigma_{22} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{22}, \quad \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12},$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right).$$

(1)

Note that in Eq. (1) the conventional notation is used.

According to [3], we consider the field equations of motion of the Newtonian compressible viscous fluid: the density, viscosity constants and pressure of which are denoted by the upper index (1). Thus, the linearized Navier-Stokes and other field equations for the fluid are:

$$\begin{aligned} \rho_0^{(1)} \frac{\partial v_i}{\partial t} - \mu^{(1)} \frac{\partial v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} - (\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}) \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} + \rho_0^{(1)} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \\ T_{ij} = \left(-p^{(1)} + \lambda^{(1)} \theta \right) \delta_{ij} + 2\mu^{(1)} e_{ij}, \quad \theta = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad a_0^2 = \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \rho^{(1)}}. \end{aligned} \quad (2)$$

where $\rho_0^{(1)}$ is the fluid density before perturbation. The other notation used in Eq. (2) is also conventional.

Assuming that $p^{(1)} = -(T_{11} + T_{22} + T_{33})/3$, we obtain that $\lambda^{(1)} = -2\mu^{(1)}/3$. Moreover, we assume that the following boundary and contact conditions are satisfied:

$$\begin{aligned} \sigma_{21}|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{22}|_{x_2=0} = -P_0 \delta(x_1) e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{x_2=-h} = v_1 \Big|_{x_2=-h}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{x_2=-h} = v_2 \Big|_{x_2=-h}, \\ \sigma_{21}|_{x_2=-h} = T_{21} \Big|_{x_2=-h}, \quad \sigma_{22}|_{x_2=-h} = T_{22} \Big|_{x_2=-h}, \end{aligned} \quad (3)$$

where $\delta(\square)$ is the Dirac delta function.

This completes the formulation of the problem. For the solution of this problem, we use the presentation $g(x_1, x_2, t) = \bar{g}(x_1, x_2) e^{i\omega t}$ (below we will omit the over bar on the amplitudes of the sought values) and replacing the derivatives $\partial(\bullet)/\partial t$ and $\partial^2(\bullet)/\partial t^2$ in the foregoing equations with $i\omega$ and $-\omega^2$, respectively, we obtain the corresponding equations and boundary and contact conditions for the amplitudes of the sought values. For the solution to these equations, we employ the exponential Fourier transformation with respect to the x_1 coordinate

$$f_F(s, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) e^{-isx_1} dx_1. \quad (4)$$

Before the employing the Fourier transformation (4) we introduce the dimensionless coordinates and dimensionless transformation parameter $\bar{x}_1 = x_1/h$, $\bar{x}_2 = x_2/h$, $\bar{s} = sh$.

For reducing the volume of the paper we do not give here the other details of the solution procedure, which are similar to those given in the papers [1, 2]. Nevertheless, we recall that under the mentioned solution procedure the dimensionless parameters

$$\Omega_1 = \frac{\omega h}{a_0}, \quad N_w^2 = \frac{\omega h^2}{\nu^{(1)}}, \quad M = \frac{\mu^{(1)} \omega}{\mu} \quad (5)$$

are introduced. Note that the dimensionless number N_w in (5) can be taken as a Womersley number and characterizes the influence of the fluid viscosity on the mechanical behavior of the system under consideration. However, the dimensionless frequency Ω_1 in (5) can be taken as the parameter through which the influence of the compressibility of the fluid on the mechanical behavior of the system under consideration can be characterized. At the same time, the parameter M characterizes the ratio of the characteristic stress caused by fluid viscosity to the shear modulus of the plate material.

Thus, within the scope of the solution procedure discussed in the papers [1, 2], we obtain analytical expression of the sought quantities, after which we determine the originals of those through the expression

$$\{u_1; u_2; \sigma_{11}; \sigma_{12}; \sigma_{22}; v_1; v_2; T_{11}; T_{12}; T_{22}\} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} \{u_{1F}; u_{2F}; \sigma_{11F}; \sigma_{12F}; \sigma_{22F}; v_{1F}; v_{2F}; T_{11F}; T_{12F}; T_{22F}\} e^{isx_1} ds \right]. \quad (6)$$

The integrals in (6) are calculated numerically for which the infinite interval $[-\infty, +\infty]$ is replaced with the finite one $[-S_1^*, +S_1^*]$. The values of the S_1^* are determined from the convergence criterion of the integrals in (6). Under calculation of the integrals in (6), the interval $[-S_1^*, +S_1^*]$ is divided into a certain number of sorter intervals. Let us denote this number through $2N$. Consequently, the length of the mentioned shorter intervals is S_1^*/N and in each of these shorter intervals the integration is made by the use of the Gauss integration algorithm with the sample points. Consequently, convergence of the mentioned numerical integration can be estimated with respect to the values of S_1^* and N . The various testing of the convergence of the numerical results show that for the quite converge and validate results are obtained in the case where $N = 2000$ and $S_1^* = 5.0$. We do not here consider examples of the numerical results illustrated this convergence, however note that such examples are given in the papers [1, 2].

This completes the consideration of the solution method.

3. Numerical results and discussions

It follows from the foregoing discussions that the problem under consideration is characterized through the dimensionless parameters Ω_1, N_w, M which are determined by the expressions in (5), and with λ/μ where λ and μ are the mechanical constants which enter the expression of the elastic relations in Eq. (1).

Table 1. The values of the mechanical constants of the selected materials

Plate material properties			
Plate materials	λ (GPa)	μ (GPa)	ρ (kg/m ³)
Steel [4]	94.4	79.0	7790
Aluminum [4]	48.1	27.4	2640
Plexiglas [4]	3.96	1.86	1160
Fluids' properties			
Fluids	$\mu^{(1)}$ (kg/(m·s))	$\rho_0^{(1)}$ (kg/m ³)	a_0 (m/s)
Glycerin [3]	1.393	1260	1927
Water [3]	1.3×10^{-3}	1000	1459.5

For investigation the influence of the material properties of the plate and of the fluid on the frequency response of the system under consideration we must consider the same numerical results obtained for the various pairs of materials (i.e. pairs consisting of plate material + fluid material) selected from the Table 1 in which the values of the mechanical constants of the possible plate and fluid materials are given. Thus, after selection of the pairs of the materials, the foregoing dimensionless parameters can be determined through the two quantities: h (the thickness of the plate-layer) and ω (the frequency of the external load). Numerical results which will be discussed below relate to the normal stress acting on the interface plane between the fluid and plate-layer and

to the velocities of the fluid (or of the plate-layer) on the mentioned interface plane in the directions of the Ox_1 and Ox_2 axes. Under obtaining the numerical results we assume that $\omega t = 0 + n\pi$, $n = 1, 2, \dots$. Thus, first we investigate the distribution of the studied quantities $T_{22}h/P_0$, $v_2\mu h/(P_0c_2)$ and $v_1\mu h/(P_0c_2)$ on the interface plane with respect to the dimensionless coordinate x_1/h . The curves of these distributions are given in Figs. 1, 2 and 3 respectively. In these figures the graphs grouped by letter a (by letter b) are constructed in the case where $\omega = 50\text{hz}$ and $h = 0.001\text{m}$ ($\omega = 400\text{hz}$ and $h = 0.05\text{m}$).

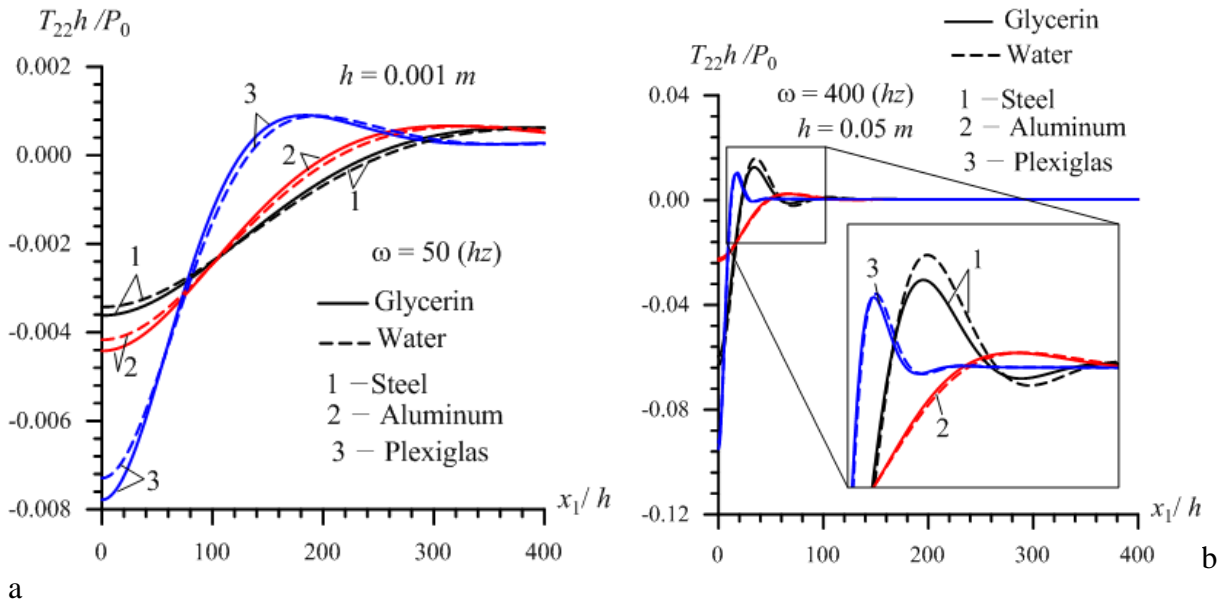


Fig.1. The distribution of the stress $T_{22}h/P_0$ with respect to x_1/h in the cases where $\omega = 50\text{hz}$ and $h = 0.001\text{m}$ (a); $\omega = 400\text{hz}$ and $h = 0.05\text{m}$ (b)

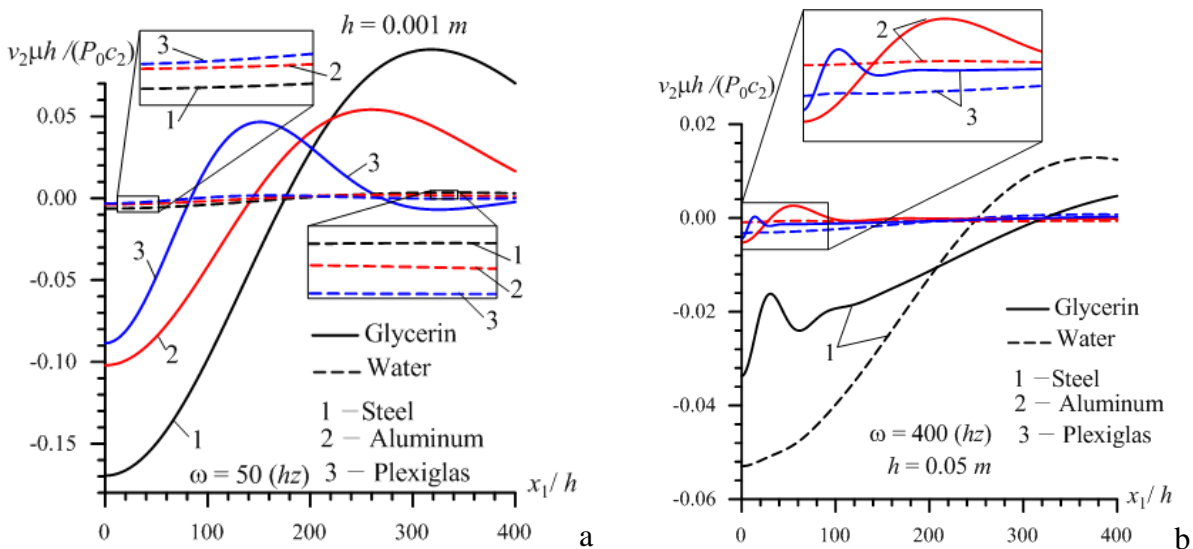


Fig.2. The distribution of the velocity $v_2\mu h/(P_0c_2)$ with respect to x_1/h in the cases where $\omega = 50\text{hz}$ and $h = 0.001\text{m}$ (a); $\omega = 400\text{hz}$ and $h = 0.05\text{m}$ (b)

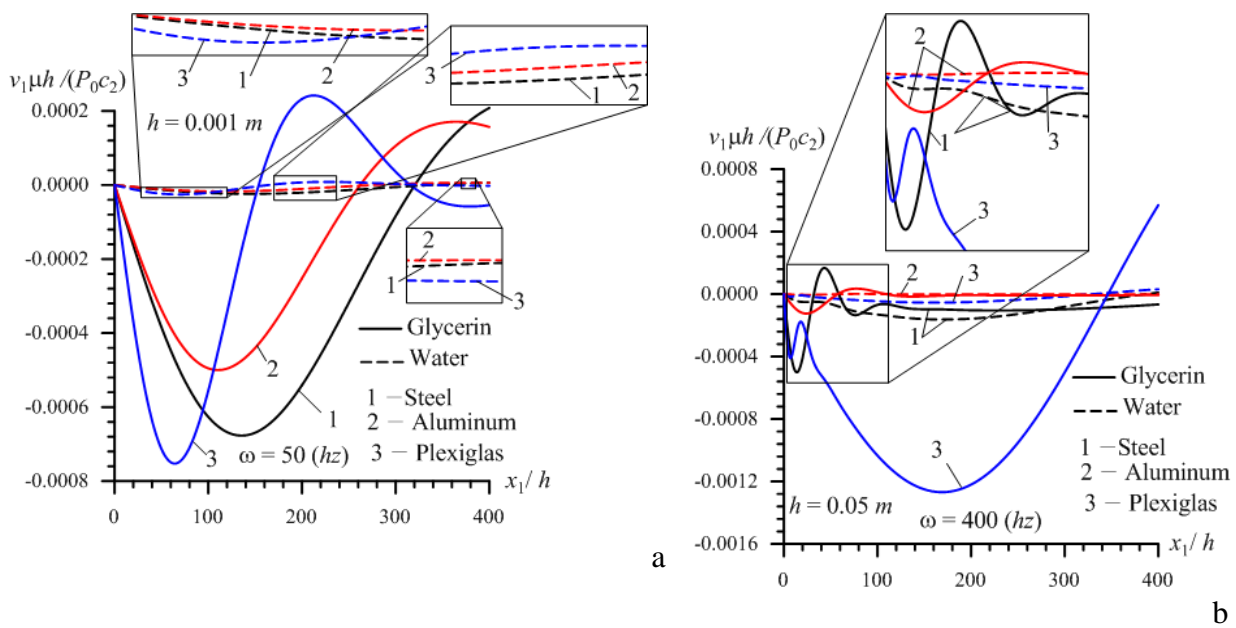


Fig.3. The distribution of the velocity $v_1 \mu h / (P_0 c_2)$ with respect to x_1/h in the cases where $\omega = 50 \text{ hz}$ and $h = 0.001 \text{ m}$ (a); $\omega = 400 \text{ hz}$ and $h = 0.05 \text{ m}$ (b)

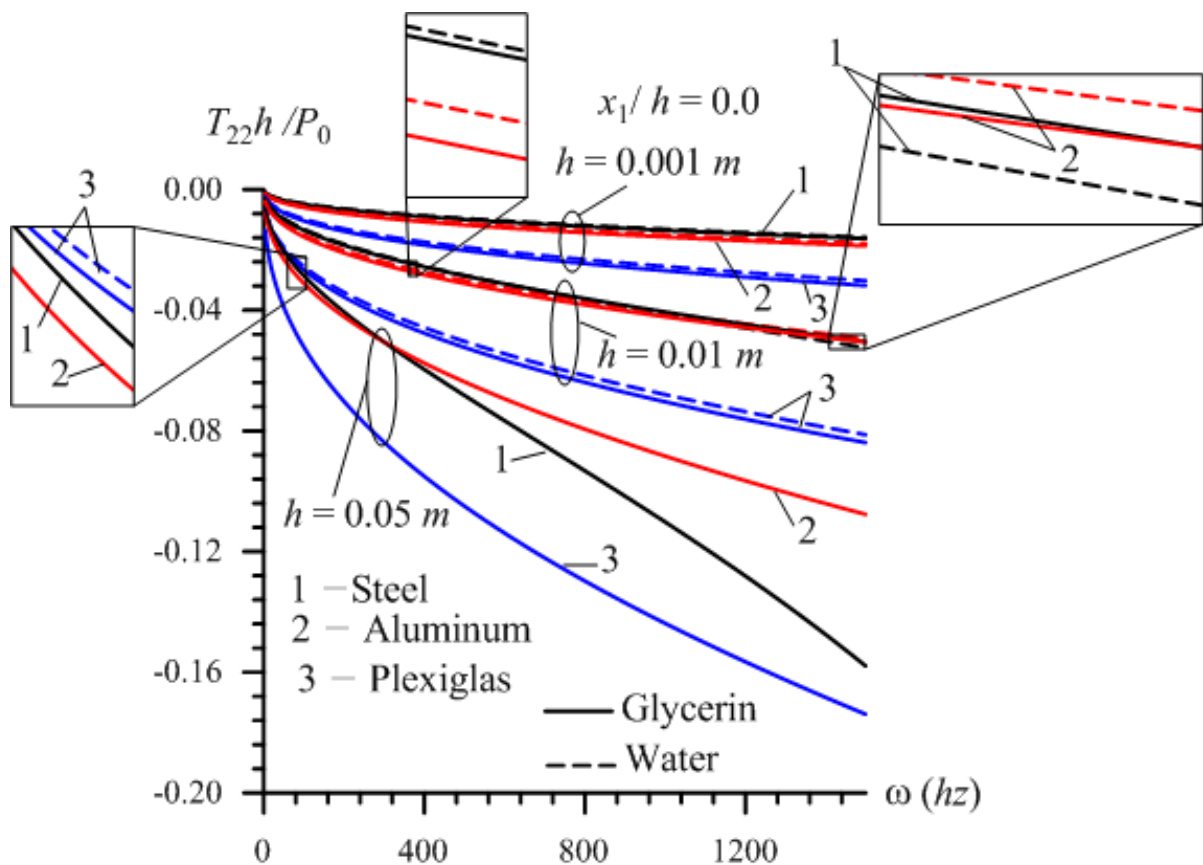


Fig. 4. The graphs illustrated of the frequency response of the stress $T_{22} h / P_0$ and constructed for various values of the plate thickness h

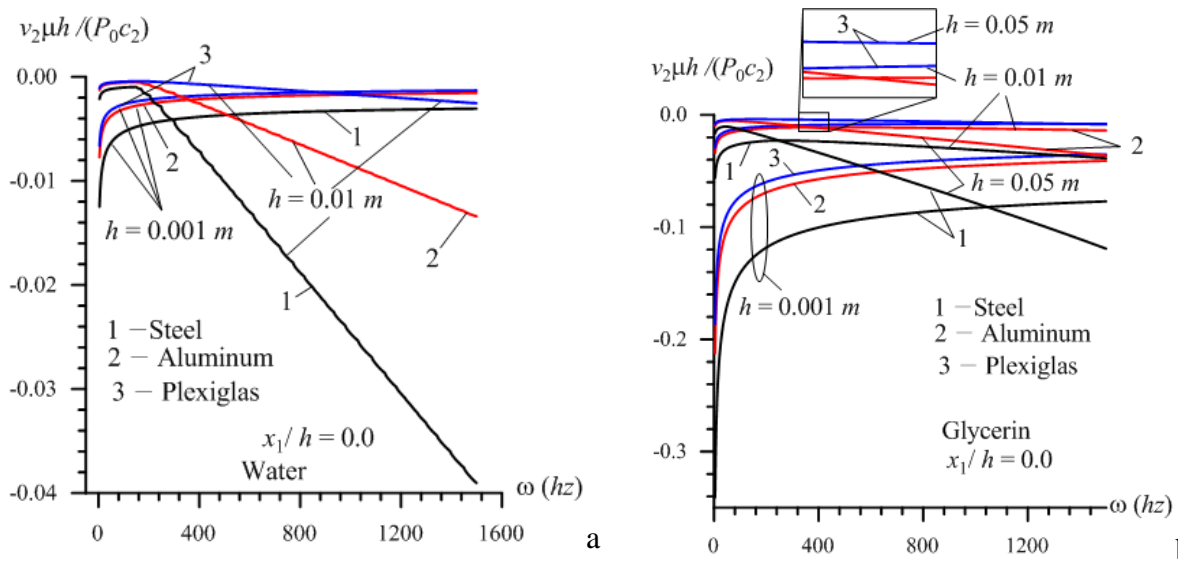


Fig. 5. The graphs illustrated of the frequency response of the velocity $v_2\mu h / (P_0c_2)$ and constructed for various values of the plate thickness in the case where the half-plane is filled with Water (a) and Glycerin (b)

Note that in Figs. 1, 2 and 3 it was taken into consideration the symmetry of the problem and the mentioned distributions are constructed for the region $x_1/h \geq 0$. It follows from the results given in these figures that, as one might expect, the absolute values of the studied quantities decay with x_1/h . This decaying for the stress $T_{22}h/P_0$ occurs more rapidly in the high frequency of the of the external load than that in the low frequency of this load. Moreover, the results given in Figs. 1a and 1b show that in the selected frequencies of the external load the values of the stress $T_{22}h/P_0$ are determined mainly with the mechanical properties of the plate material. However, the results given in Figs. 2a and 2b show that in the low frequency (Fig.2a) of the external load the absolute values of the velocity $v_2\mu h / (P_0c_2)$ depend mainly on the mechanical properties of the fluid filled the half-plane. At the same time, Fig. 2b shows that in the high frequency of the external load and in the case where the thickness of the plate is more considerable than that indicated in Fig. 2a, the absolute values of the velocity $v_2\mu h / (P_0c_2)$ depends mainly not only on the mechanical properties of the fluid, but also on the mechanical properties of the plate material. Moreover, the comparison of the results given in Fig. 2a with corresponding ones given in Fig. 2b shows that the absolute values of the velocity $v_2\mu h / (P_0c_2)$ obtained in the case indicated in Fig. 2a greater significantly than corresponding ones obtained in the case indicated in Fig. 2a. At the same time, the comparison of the results given in Fig. 3 with corresponding ones given in Fig. 2 shows that in the cases under considerations the absolute values of the velocity $v_1\mu h / (P_0c_2)$ are negligible with respect to the absolute values of the velocity $v_2\mu h / (P_0c_2)$

Thus, it follows from the Figs. 1 and 2 that the absolute maximum values of the stress $T_{22}h/P_0$ and velocity $v_2\mu h / (P_0c_2)$ arise at the point $x_1/h = 0$. Taking this statement into account, consider the frequency response of the stress $T_{22}h/P_0$ and velocity $v_2\mu h / (P_0c_2)$ calculated at the point $x_1/h = 0$. The graphs of these responses are given in Figs. 4 and 5 for the stress $T_{22}h/P_0$ and for the velocity $v_2\mu h / (P_0c_2)$ respectively. Note that the mentioned graphs are constructed for various values of the plate thickness. Moreover, note that for clarity of the illustrations the graphs of the frequency response related to the velocity $v_2\mu h / (P_0c_2)$ constructed in the case where the half-plane is filled with Water (with Glycerin) are given separately in Fig. 5a (in Fig. 5b).

Thus, it follows from the results given in Fig. 4 that the absolute values of the stress $T_{22}h/P_0$ increase monotonically with the plate thickness and with the frequency of the external loading. At the same time, these results show that the absolute values of the stress $T_{22}h/P_0$ depends mainly on the mechanical properties of the plate material. Consequently, the influence of the mechanical properties of the fluid on the absolute values of the stress under consideration is insignificant. Note that in Fig. 4 the graphs related to the case where $h=0.05m$ and constructed in the case where the half-plane material is Water, do not given, because these graphs coincide almost completely with corresponding ones obtained in the case where half-plane is filled with the Glycerin. Thus, the graphs given in Fig. 4 and data given in Table 1 allow us to make the following conclusion: the simultaneous increase in the values of the Lamé constants and of the density of the plate material causes to increase the absolute values of the stress $T_{22}h/P_0$.

Now we consider the graphs illustrated frequency response of the velocity $v_2\mu h/(P_0c_2)$, i.e. the graphs given in Fig. 5 from which follows that in the relatively thin plates, i.e. in the case where $h=0.001m$ the absolute values of this velocity decrease and approach the certain asymptote with the frequency. At the same time, in the mentioned case the absolute values of the velocity $v_2\mu h/(P_0c_2)$ depends mainly on the mechanical properties of the fluid. Moreover, the results given in Fig. 5 also show that in the cases where $h\geq 0.01m$ the absolute values of the velocity $v_2\mu h/(P_0c_2)$ increase monotonically with the frequency and these values depend not only on the mechanical properties of the fluid, but also on the mechanical properties on the plate material. Thus, the graphs given in Fig. 5 and data given in Table 1 allow us to make the following conclusion: in the cases where $h\geq 0.01m$ the simultaneous increase in the values of the Lamé constants and of the density of the plate material causes to increase the absolute values of the velocity $v_2\mu h/(P_0c_2)$ for each selected fluid the values of the mechanical properties of which are given in Table 1.

The foregoing results and conclusions have a great significance not only in the theoretical sense, but also in the practical sense and they give orientation for estimation and forecasting of the mechanical behavior of the plate + fluid systems.

REFERENCES

1. Akbarov S.D., Ismailov M.I., Forced vibration of a system consisting of a pre-strained highly elastic plate under compressible viscous fluid loading. CMES: Computer Modeling in Engineering & Science, 97(4), pp. 359 – 390 (2014)
2. Akbarov S.D., Ismailov M.I., Frequency response of a viscoelastic plate under compressible viscous fluid loading. International Journal of Mechanics, 8, pp. 332-344 (2014)
3. Guz A.N., Dynamics of compressible viscous fluid, Cambridge Scientific Publishers, (2009)
4. Guz A.N., Makhort F.G., The physical fundamentals of the ultrasonic nondestructive stress analysis of solids. International Applied Mechanics 36, 1119 – 1148 (2000).

XÜLASƏ

Məftun İsmayılov, Elşən Məmmədov

Mexaniki xassələrin sıxılabilən özlü maye ilə yüklənən lövhənin amplitud-tezlik asılılığına təsiri haqqında

Məqalədə elastik lövhə və sıxılabilən özlü mayedən əmələ gələn hidro-elastik sistemin amplitud-tezlik asılılığına bu sistemin komponentlərinin mexaniki xassələrinin təsiri öyrənilir. Fərz

edilir ki, lövhənin sərbəst səthinə zamana görə harmonik dəyişən qüvvət təsir edir. Lövhənin hərəkəti xətti elasto-dinamikin dəqiq tənlikləri, mayenin hərəkəti isə xəttləşdirilmiş Naviye-Stoks tənlikləri vasitəsi ilə yazılır. Hidro-elastik sistemin komponentlərinin mexaniki xassələrinin bu sistemin fazalar arası gərginlik və sürət dağılımına təsirini göstərən ədədi nəticələr verilir və müzakirə edilir.

РЕЗЮМЕ

М. Исмаилов, Е. Маммадов

О влияние материальных свойств на амплитудно-частотные характеристики пластин при его нагружение со сжимаемой вязкой жидкости

В статье изучается влияние материальных свойств гидроупругой системы состоящей из упругой пластина и полу-плоскость заполненной со сжимаемой вязкой жидкости на его амплитудно-частотные характеристики в случае когда на свободной поверхности пластин действует линейно-сосредоточенная сила гармоническо изменяющиеся со временем. Движения пластина описывается с точными уравнениями эласто-динамики, и движения жидкости с линеаризированными уравнениями Навие - Стокса. Численные результаты иллюстрирующие влияние материальных свойств составляющих рассматриваемой гидроупругой систему на распределение межфазных напряжений и скоростей представляются и обсуждается.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə
çapa tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

QULU HƏZİYEV

AMEA Naxçıvan Bölməsi

E-mail: atcc55@mail.ru**UOT 539.12****GÜNƏŞ KÜLƏYİ VƏ PLANETLƏRARASI MAQNİT SAHƏLƏRİ****Açar sözlər:** *Günəş küləyi, plazma, planetlərarası fəza, irimiqyaslı maqnit sahələri, planetlərarası maqnit sahəsi.***Key words:** *solar wind, interplanetary space, large-scale magnetic field, interplanetary magnetic field.***Ключевые слова:** *Солнечный ветер, межпланетная пространства, крупномасштабные магнитные поле, межпланетное магнитное поле.*

Günəş küləyi yüksək temperaturlu plazma selindən ibarətdir. Günəşdə fiziki şərait elədir ki, plazma axınları maqnit sahəsini də özü ilə daşıyır. Bu səbəbdən Günəş küləyində yüksək səviyyədə ionlaşmış qaz halındakı plazma maqnit sahələrini hətta Günəş sisteminin hüdudlarından kənara belə daşıya bilir. Günəşdən uzaqlaşdıqca Günəş küləyi maddəsinin temperaturu nəzərə çarpacaq dərəcədə aşağı düşə bilər. Ancaq plazma qazı həddindən artıq seyrək olduğundan, proton və elektronların birləşmə ehtimalı çox az olur. Bu səbəbdən Günəş küləyi vasitəsi ilə maqnit sahələri Günəş sisteminin hər tərəfinə yayılaraq planetlərarası maqnit sahələrini əmələ gətirirlər. Bəs bu maqnit sahələrinin təbiəti necədir?

Araşdırmalar göstərir ki, bu maqnit sahələrinin mənbəyinin Günəşdəki irimiqyaslı maqnit sahələrində (İMS) axtarmaq lazımdır. Günəş tacından başlanan Günəş küləyi Günəş ləkələrinin və fəal sahələrin kifayət qədər intensiv olan local sahələrini daşıya bilməz. Çünki onlar üzvü sürətdə bir-biri ilə sıx bağlıdır. İMS isə intensivliyi cəmi bir neçə qaussla ölçülən və Günəşin bütün səthini əhatə edən zəif sahələrdir. Müqayisə üçün qeyd edək ki, Yer maqnit sahəsinin intensivliyi təqribən 0,5 qaussdur [1].

Əgər Günəş fırlanmasaydı, onda Günəş küləyinin maqnit sahəsinin qüvvə xəttlərinin istiqaməti radial istiqamətdə olardı. Maqnit qüvvə xəttləri Günəşə bağlı olduğundan, Günəşin fırlanması nəticəsində maqnit qüvvə xətləri burularaq spiralvari forma alır [4]. Radial maqnit sahəsinin təsiri də qravitasiyada olduğu kimi Günəşdən olan məsafənin kvadratı ilə mütənəsis olaraq azalır. Hesablamalar göstərir ki, Günəş küləyinin yerətrafi fəzada yaratdığı maqnit sahəsinin intensivliyi $(3-4) \cdot 10^{-5}$ qauss olmalıdır.

Günəş sisteminin daxilində Günəş küləyinin təbiətini öyrənmək üçün kosmik aparatlardan geniş istifadə olunur. Kosmik aparatların çoxu yüklü hissəciklərin qeyd olunması üçün lazım olan zəruri avadanlıqlarla təchiz olunur. Bu avadanlıqların demək olar ki, əksəriyyətinin işləmə prinsipinin əsasında yüklü hissəciklərlə toqquşma zamanı yaranan fiziki və kimyəvi effektlər durur. Qeyd etmək lazımdır ki, Günəş küləyinin Günəş sisteminin hər yerinə sirayət etməsi məhz kosmik aparatlarla aparılan tədqiqatlar nəticəsində öz təsdiqini tapmışdır. Günəş küləyinin aşkara çıxarılması və parametrlərinin ölçülməsində bir çox kosmik qurğularla yanaşı amerikalıların yaratdığı “Mariner II” və “Eksplorer X” kosmik aparatlarının xüsusi rolu olmuşdur. Bütün bu aparatların olduğu hər yerdə Günəş küləyinin fasiləsiz olaraq “əsdii” isbat olunmuşdur və məlum olmuşdur ki, Yer yaxınlığında fasiləsiz Günəş küləyinin sürəti 400 km/san ətrafındadır [2].

Günəş küləyinin intensivliyi və sürəti bəzən sabit, bəzən isə dəyişkən olur. Turbulentliyə mailli olan Günəş küləyinin hərəkət sürəti Günəş fəallığı dövrü yüksək olur. Kosmik aparatlar vasitəsi ilə ölçmələr göstərir ki, intensivliyi bir kvadrat santimetrədə hər saniyədə orta hesabla 108 protondur. Sıxlığı çox da böyük deyildir. Yerətrafi fəzada bir kub santimetr həcmə 1-10 sayda proton düşür [3]. Günəş küləyinə aid olan fiziki parametrlərin təyin olunmuş qiymətləri Günəş

tacının qəbul olunmuş modelinə uyğundur. Həmin modelə görə Günəş küləyindəki yüklü hissəciklərin hərəkəti maqnit sahələri tərəfindən istiqamətlənir. Günəşdən Yerə doğru bu hərəkətin necə baş verdiyini izləmək üçün hər şeydən əvvəl hissəciklərin hərəkət etdiyi məkanın – planetlərarası fəzanın xüsusiyyətlərinə diqqət yetirmək lazımdır. Bu fəzanın əsas xüsusiyyəti maqnit sahəsinə malik olmasıdır. Planetlərarası maqnit sahələrinin formalaşmasında əsas faktor Günəşdəki İMS-dir.

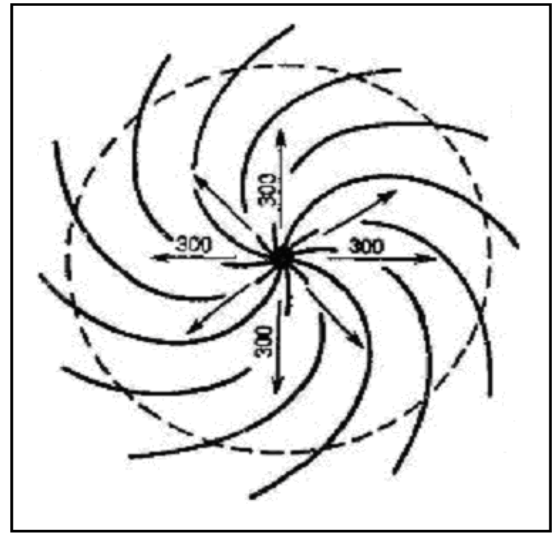
Günəşin maqnit sahəsi Yerinkindən fərqlənir. Lokal və irimiqiaslı sahələrin xaotik və nizamsız strukturlarından ibarət olan bu sahələr Yerdəki kimi düzgün dipol sahələrdən kəskin fərqlənir. Buna baxmayaraq Günəşin bir ulduz kimi malik olduğu zəif İMS-in dipol komponenti də vardır. Ancaq bu dipol komponenti planetlərarası sahələrin əmələ gəlməsində demək olar ki, rol oynamır. İMS-in digər bir komponenti necə deyirlər, açıq “birqütblü” sahələrdir. Məhz bu sahələrin üstünlük təşkil etdiyi ərazilərdə böyük tac dəşikləri əmələ gəlir ki, onlar da güclü plazma axınına rəvac verir.

Günəşdən hərəkət edən plazma (Günəş küləyi) özü ilə maqnit sahəsinə də planetlərarası fəzaya daşıyır. Plazma öz-özlüyündə ideal elektrik keçiricisidir. Məlumdur ki, yüksək dərəcəli naqillərdə maqnit sahəsinin dəyişməsinə qarşı əks-təsir vardır. Maqnit sahəsi dəyişdikdə naqildə yaranan elektrik cərəyanının yaratdığı maqnit sahəsi bu dəyişməyə mane olur. Günəş tacında və planetlərarası fəzada plazma özünü ideal naqıl kimi apardığından, maqnit selinin ixtiyari dəyişməsinə mane olur. Bu halda deyilir ki, maqnit sahəsinin plazmaya və ya plazmadan diffuziyası mövcud deyildir.

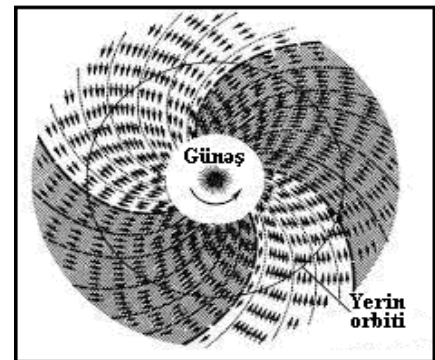
Planetlərarası fəzanı dolduran və ideal naqıl olan Günəş plazması qarşısına çıxan maqnit sahəsinə dağdır və planetlərarası fəza ancaq Günəş küləyi vasitəsi ilə gətirilən maqnit sahələri ilə dolur. Bəs planetlərarası maqnit sahələrinin strukturu necədir? Planetlərarası fəzanın hər yerinə yayılan Günəş plazmasının daşdığı maqnit sahələrinin istiqaməti müxtəlif olur. Sahənin qüvvə xəttləri ya Günəşə doğru, ya da əksinə istiqamətlənmiş olur. Bizim üçün mühüm əhəmiyyət kəsb edən əsas məsələ ondan ibarətdir ki, planetlərarası maqnit sahələri ekliptika müstəvisi boyunca necə yerləşmişdir. Sadəcə halda bunu şəkil 1-də göstərildiyi Arximed spiralları kimi təsəvvür etmək olar. Günəş plazmasının fiziki parametrlərini nəzərə almaqla yerinə yetirilən qiymətləndirmələr göstərir ki, yerətrafi fəzada maqnit sahəsinin qüvvə xəttləri ilə Günəş radiusu istiqaməti arasındakı bucaq 45° ətrafındadır. Şəkil 1-də planetlərarası fəzadakı maqnit sahəsinin qüvvə xəttlərinin ancaq forması öz əksini tapmışdır. Onların istiqamətləri isə müxtəlif istiqamətli olaraq sektor quruluşu əmələ gətirir.

Şəkil 2-də planetlərarası sahələrin qüvvə xəttləri istiqamətinin Yerin orbiti boyunca yerləşməsi göstərilmişdir. Qüvvə xətlərinin istiqamətləri Yerin süni peyki İMP-!-in 3 dolanma dövrü ərzində müəyyən edilmişdir. Sektorların sərhəddi Arximed spiralları kimi göstərilmişdir. Planetlərarası fəzada maqnit sahəsinin sektor quruluşuna malik olması Yerdə maqnit fırtınalarının əmələ gəlməsi və hətta iqlimin formalaşması baxımından mühüm əhəmiyyət daşıyır.

Kosmik aparatlar vasitəsi ilə aparılan müşahidələr göstərir ki, Günəş küləyinin sürəti və



Şəkil 1. Günəş-planetlərarası maqnit sahələrinin ekliptika müstəvisindəki spirallı forması. Günəş küləyi sürətinin 300 km/san olduğu qəbul edilir.



Şəkil 2. Planetlərarası maqnit sahəsinin sektor quruluşu

sıxlıqlı mütəmadi olaraq dəyişir və sektorların sərhəddində bu parametrlər kəskin artır. Sektorların sərhəddindən keçəndən 2 gün sonra plazmanın sıxlığı çox sürətlə artır. Sonrakı 2 və ya 3 gün ərzində tədricən azalmağa başlayır. Günəş küləyinin sürəti maksimuma çatandan 2-3 gün sonra azalmağa doğru gedir [3].

Planetlərarası maqnit sahəsinin sektor quruluşunun və günəş plazmasının sürətinin və sıxlığının yuxarıda göstərilən dəyişməsinin Yer in maqnitoferasında baş verən sarsıntılarla sıx əlaqəsi vardır. Peyklər vasitəsi ilə aparılan ölçmələr göstərir ki, maqnit fırtınaları o vaxt başlayır ki, yerətrafi fəzada maqnit sahəsi 10 dəfədən çox artsın və daha çox qeyri-sabit xarakter alsın. Bu vəziyyət isə Günəş küləyinin güclənməsi vaxtı baş verir ki, bu zaman plazma seli Günəşin fəal sahələrindən daha intensiv və qeyri-sabit maqnit sahələrini planetlərarası fəzaya daşıyır.

Müşahidələr göstərir ki, planetlərarası maqnit sahələrinin bir çox parametrləri, xüsusən intensivliyi və qeyri-sabitliyi ilə Günəş fəallığı arasında sıx əlaqələr vardır. Bu əlaqələrin xarakterinin və mexanizminin ətraflı surətdə öyrənilməsi Günəş-Yer əlaqələri probleminin prioritet istiqamətlərindən biridir.

ƏDƏBİYYAT

1. Паркер Е. Н. Динамические процессы в межпланетной среде / Пер. с англ. Москва, Мир, 1965
2. Пудовкин М. И. Солнечный ветер // Соросовский образовательный журнал, 1996, No 12, с. 87-94
3. Хундхаузен А. Расширение короны и солнечный ветер / Пер. с англ. Москва: Мир, 1976
4. Физика космоса, Маленькая энциклопедия, Москва, Советская Энциклопедия, 1986.

ABSTRACT

Gulu Haziiev

Solar wind and interplanetary magnetic fields

The solar wind is a continuous stream of plasma of solar origin, which propagates approximately radially from the Sun and fills the solar system up to heliocentric distances of ~ 100 AU. The solar wind carries with it to the interplanetary medium a coronal magnetic field. The field lines of this field frozen into the plasma form an interplanetary magnetic field. The density of the wind falls proportionally to the square of the increase in the distance from the sun. In the end, the wind should become so thin that it ceases to exist under the influence of other fine gases and weak magnetic fields. In the area of the Earth's orbit, its velocity reaches an average value of 400-500 km/sec at a proton temperature of 100 000 K and a slightly higher electron temperature.

РЕЗЮМЕ

Гулу Газиев

Солнечный ветер и межпланетные магнитные поля

Солнечный ветер, это непрерывный поток плазмы солнечного происхождения, распространяющийся приблизительно радиально от Солнца и заполняющий собой Солнечную систему до гелиоцентрической расстояний ~ 100 а.е Солнечный ветер уносит с собой в межпланетную среду корональное магнитное поле. Вмороженные в плазму силовые линии этого поля образуют межпланетное магнитное поле. Плотность ветра падает пропорционально квадрату увеличения расстояния от Солнца. В конце концов, ветер должен стать столь разреженным, что он прекращает свое существование под воздействием других тонкодисперсных газов и слабых магнитных полей. В районе орбиты Земли его скорость достигает среднего значения 400–500 км/сек при температуре протонов 100 000К и несколько большей температуре электронов.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə çapa tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

XANƏLİ HƏSƏNOV

Naxçıvan Dövlət Universiteti

UOT 621.315.592

QEYRİ PARABOLİK ZONALI YARIMKEÇİRİCİLƏRDƏ ELEKTROMAQNİT DALĞALARININ YÜKDAŞIYICILARIN QIZDIRILMASINA TƏSİRİ

Açar sözlər: *yarımkeçirici, elektron, fonon, zona, dreyf sürəti*

Keywords: *semiconductor, electron, phonon, band, drift, velocity*

Ключевые слова: *полупроводник, электрон, фонон, зона, дрейфовая скорость*

Yarımkeçirici kristalların zona quruluşunun təhlili göstərir ki, onların bir çoxu, xüsusilə n-Ge, n-Si və qurğuşunun halkogenidləri qeyri-parabolik dispersiyaya malikdir. PbTe, PbSe və PbS kristalları bir-birinə nəzərən fəza diaqonalının yarısı qədər sürüşən iki üzrə mərkəzləşmiş kubik qəfəsdən ibarətdir. Üzmərkəzləşən kubik qəfəslərdən birinin şəbəkələrində qurğuşun atomları, digərinin şəbəkələrində isə Te, Se və S atomları yerləşib. Bu cür kristallarda kinetik effektlərə bir sıra monoqrafiyalarda geniş baxılmışdır [1-3].

Qeyri parabolik zonalı yarımkeçiricilərdə yükdaşıyıcıların defektlərdən və fononlardan səpilməsi anizotrop olduqda orada yayılan elektromaqnit dalğalarının qeyri-xətliyinə səbəb ola bilər. Bu işdə həmin məsələyə, baxılmışdır. n-tip yarımkeçiricilərdə elektronların fononlarla qarşılıqlı sövqü tezliklərin $\omega < \beta_e < v_{er}$ və $\beta_e < \omega < v_{er}$ şərtlərini ödədiyi halda mümkündür. Burada ω -yarımkeçirici kristalda yayılan dalğanın tezliyi, v_{er} və β_e uyğun olaraq elektron-fonon və fonon-elektron toqquşma tezlikləridir. Tələb edilən şərt ödəniləndə yükdaşıyıcı fonon sistemi yayılan dalğanın dəyişməsinə uyğunlaşır.

İşdə hesab edilir ki, elektronların dreyf sürəti onların istilik hərəkətinin orta sürətindən nəzərəcarpacaq dərəcədə kiçikdir. Bu halda onların paylanma funksiyasını

$$f(\vec{p}, \vec{r}, \vec{t}) = f_0(\varepsilon, \vec{r}, t) + \frac{(\vec{f}, \vec{p})}{p} = f_0 + f_1$$

Şəklində göstərmək olar. Burada f_0 -paylanma funksiyasını izotrop hissəsi, f_1 -paylanma funksiyasına edilən qeyri-taraz əlavədir $f_1 \ll f_0$ olduğunu nəzərə alsaq Bolsmanın kinetik tənliyindən \vec{f}_1 üçün

$$\vec{f}_1 - \frac{\omega_H}{v(\varepsilon) - i\omega} [\vec{h}\vec{f}_1] + \frac{e\rho}{m(v(\varepsilon) - i\omega)} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \frac{4\pi m}{(2\pi\hbar)^3 p^3(\varepsilon)} \delta(u) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \vec{k} \times \\ \times \frac{1}{v(\varepsilon) - i\omega} \int_0^{2\rho} \hbar\omega_q W_q \tilde{N}(q, T, T_e) \frac{u}{S_0} \frac{\beta(q)}{\beta(q) - i\omega} q^2 dq \quad (1)$$

alırıq. Burada \vec{k} -fononların dreyfi istiqamətində vahid vektor, $\vec{h} = \vec{H}/H$ -maqnit sahəsi istiqamətində vahid vektor, u -fononların dreyf sürəti, S_0 -səsin kristalda sürəti, $\omega_H = \frac{eH}{mc}$ -tsiklotron tezlik, $\delta(u)$ -qarşılıqlı sövqü xarakterizə edən parametridir. $\vec{f} = \rho(\varepsilon) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \vec{v}(\varepsilon)$ olduğundan elektronların dreyf sürəti (1) tənliyindən aşağıdakı kimi yazılır.

$$\vec{v}(\varepsilon) - \frac{\omega_H}{v(\varepsilon) - i\omega} [\vec{h}\vec{v}(\varepsilon)] + \frac{e\vec{E}}{m(v(\varepsilon) - i\omega)} = \frac{4\pi m}{(2\pi\hbar)^3 p^3(\varepsilon)} \cdot \frac{1}{v(\varepsilon) - i\omega} \times \\ \times \int_0^{2\rho} \frac{\beta(q)}{\beta(q) - i\omega} \hbar\omega_q \frac{\vec{u}}{S_0} W_q \tilde{N}(q, \vec{T}) \delta(u) q^2 dq \quad (2)$$

Burada $\tilde{N}(q, \tilde{T})$ – fononların paylanma funksiyası, W_q -səpilmənin matris elementi, q -fononların impulsudur. (2) ifadəsinin hər tərəfini $m^2(\varepsilon)(-\partial f_o/\partial \varepsilon)$ -yə vurub. $(\varepsilon(q/2); \infty)$ intervalında inteqrallasaq $\vec{k} \parallel O_z \parallel \vec{E} \perp \vec{H}$ həndəsəsində elektronların dreyfi üçün

$$\vec{v}(\varepsilon) = \frac{e(1-\gamma_o)[v(\varepsilon)-i\omega]}{m(\varepsilon)[\omega_H^2+(1-\gamma_o)^2[v(\varepsilon)-i\omega]^2]} \left[\vec{E} + \frac{\omega_H}{(1-\gamma_o)(v(\varepsilon)-i\omega)} [\vec{h}\vec{E}] \right] \quad (3)$$

alırıq. Burada $\gamma_o = \int_{\varepsilon(q/2)}^{\infty} \gamma(\varepsilon)m^2(\varepsilon)(-\partial f_o/\partial \varepsilon) d\varepsilon / \int_{\varepsilon(q/2)}^{\infty} m^2(\varepsilon)(-\partial f_o/\partial \varepsilon) d\varepsilon$ elektron - fonon qarşılıqlı sövq vurğusudur.

Məlumdur ki, ümumi halda energetik spektr $p(\varepsilon) = \mu\varepsilon^2$ şəklindədir. Qeyri-parabolik Keyn tipli yarımkəçiricilər üçün $s=1/2$, $\mu = \sqrt{2m_n/\varepsilon_g}$ (m_n -elektronun keçiricilik zonasının dibində kütləsi, ε_g – qadağan zonasının enidir) olduğunu nəzərə alıb cərəyan sıxlığını hesablasaq

$$j = \frac{1-\gamma_o}{\Gamma(3s)3s^2} \frac{ne^2}{\mu^2} \frac{\theta^{-(3s+1)}}{T^{3s+1}} \int_0^{\infty} \frac{(1-\gamma_o)(v(\varepsilon)-i\omega)-i\omega_H}{\omega_H^2+(1-\gamma_o)^2(v(\varepsilon)-i\omega)^2} \varepsilon^{s+1} \bar{e} \frac{\varepsilon}{T_e} d\varepsilon E \quad (4)$$

alırıq. Burada $\theta_e = T_e/T$ -ölçüsüz elektron temperaturu, $\Gamma(\gamma) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\gamma-1} dx - \gamma$ qamma funksiyasıdır. Cərəyan sıxlığının ifadəsində tezliklərin; $\omega_H \gg \omega(1-\gamma_o)$ və $[\omega_H - \omega(1-\gamma_o)]^2 \gg v^2(\varepsilon)(1-\gamma_o)^2$ şərtlətini ödədiyini nəzərə alsaq elektrik keçiriciliyi tapıla bilər.

$$\sigma = \sigma_o \frac{1}{3\Gamma(3s)} \left[\Gamma(7s + st - 1) \delta(u) \frac{\beta_{pb}}{\beta_e(t)} \theta_p \theta_e^{2s+st+2} \frac{\nu_p(T)M^2T^{2s-1}}{\omega_H m_n} - i \frac{1}{3} \Gamma(3sH) \theta_e^{2-s} \right] \quad (5)$$

Burada $\sigma_o = ne^2/m\omega_H$ -qarşılıqlı sövq və qızdırılma olmadıqda elektrik keçiriciliyi, $\theta_p = T_p/T$ - ölçüsüz fonon temperaturu, $\nu_p(T)$ -qeyri parabolik spektrdə qızma olmadıqda elektron-fonon toqquşma tezliyi, $t=\pm 1$ -potensialdan səpilmə parametridir.

Ölçüsüz elektron temperaturunun kordinatdan (oz-dən) asılılığı enerji balansı tənliyindən hesablanıb. Fononlar qəfəs temperaturunda qalıb ($\theta_p = 1$), elektronlar isə xarici sahənin hesabına qızdırıldığı halda ($\theta_e > 1$) həmin tənlik

$$-\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(p^2 e(\vec{E} \vec{f}_1) \right) = \frac{2\pi}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \times \\ \times \left\{ m^2(\varepsilon) \int_0^{2\rho} \hbar \omega_q w_q q d_q [N(q, T)\hbar] w_q \left(-\frac{\partial f_o}{\partial} \right) \frac{s_o}{2u} u(u) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} |\vec{f}_1| N(q, T) \frac{q}{(\varepsilon) s_o} u \delta(u) + f_o \right\} \quad (6)$$

kimidir. Tənliyin həllindən axtardığımız kəmiyyət asanlıqla alınır.

$$\theta_e(z) = 1 + \frac{\beta_{pb}^2}{\beta_e^2} \left[\frac{s_o}{2u} 4(u) - 1 \right] \quad (7)$$

Burada $\varphi(u) = \ln \left| \frac{1+u/s_o}{1-u/s_o} \right|$. Fononların dreyf sürəti səs sürətinə çox yaxın olduqda $u \rightarrow s_o$ və $\varphi(u) \gg 1$, elektronların qızması güclü isə $\theta_e \gg -1$ dir. Fononların dreyf sürətinin düşən dalğanın $E_o(z)$ amplitudu ilə əlaqəsinin $u = (\beta_e/\beta)(c/H)E_o(z)$ olduğunu nəzərə alsaq sonuncu ifadə

$$\theta_e(z) = \left[2 \left(\frac{\beta_e(T)}{\beta_{pb}(T)} \right)^2 \frac{c}{s_o H \varphi(u)} \right]^{3-2s} E_o^{1-2s} \quad (8)$$

kimi olar. (8)-in hesablanmasında $\beta_e(\theta) = \beta_e(T)\theta_e^{s-2}$ asılılığı nəzərə alınmışdır [4]. Bu ifadədən görünür ki, qeyri-parabolik Keyn tipli yarımkəçiricilərdə yayılan elektromaqnit sahəsinin kordinata görə elektronların qızdırılmasına təsiri $\theta_e \sim E_o^{\frac{1}{2}}(z)$ şəklindədir.

ƏDƏBİYYAT

1. Аскеров В.М. Кинетические эффекты в полупроводниках – Л.Наука, 1970

2. Ансельм А.И. Введение в теорию полупроводников – М.Наука, 1978
3. Электрические и гальваномагнитные явления в анизотропных полупроводниках /Под общей ред. И.П. Барановского, Киев, Наукова дума 1977
4. Басс Ф.Г., Гуревич Ю.Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда. М., Наука, 1975

ABSTRACT

Khanali Hasanov

Impact of electromagnetic waves on charge carrier heating in nonparabolic-band semiconductors

The paper considers the nonlinearity of extended electromagnetic waves at carrier scattering from defects and phonons in nonparabolic-band semiconductors. Frequency ranges which cause mutual drag in n-type semiconductors are shown. Drift velocities are calculated from the Boltzmann kinetic equation and the electrical conductivities of the electrons are found. A dimensionless electron temperature is introduced, and from the energy balance equation, its coordinates are found and amplitude dependences of the extended wave are determined. As a result, it has been ascertained that in non-parabolic Kane semiconductors the heating of electrons by an external field is directly proportional to the square root of the electromagnetic waves amplitude.

РЕЗЮМЕ

Ханали Гасанов

Влияние электромагнитных волн на подогрев носителей тока в полупроводниках с непараболической зоной

В работе рассмотрена нелинейность распространённых электромагнитных волн при рассеянии носителей от дефектов и фононов в полупроводниках с непараболической зоной. Показаны интервалы частот, которые обуславливают взаимное увлечение в полупроводниках n-типа. По кинетическому уравнению Больцмана вычислены дрейфовые скорости и найдены электропроводности электронов. Введена безразмерная электронная температура, и по уравнению энергетического баланса найдены его координаты и определены амплитудные зависимости распространённой волны. В результате получено, что в непараболических полупроводниках кейновского типа подогрев электронов внешним полем прямо пропорционален квадратному корню из амплитуды электромагнитных волн.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə
çapa tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

Məqaləni çapa təqdim etdi: *Fizika üzrə fəlsəfə doktoru,*
dosent F.Qocayev

NAXÇIVAN DÖVLƏT UNIVERSİTETİ. ELMİ ƏSƏRLƏR, 2017, № 4 (85)

NAKHCIVAN STATE UNIVERSITY. SCIENTIFIC WORKS, 2017, № 4 (85)

НАХЧЫВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ. НАУЧНЫЕ ТРУДЫ, 2017, № 4 (85)

**ШАМСАДДИН КАЗЫМОВ,
БИЛЛУРА ГАДЖИЕВА,
ГЮЛШЕН МАМЕДОВА**

Нахчыванский Государственный Университет

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРНЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ В КРИСТАЛЛАХ ХАЛЬКОГЕНИДАХ СЕРЕБРА*Açar sözlər: Faza keçidləri, strukturlar, Qarıışıqlar, çevrilmələr, Quruluş dəyişmə***Key words:** *Phase transitions, structures, solutions, reorganizations, modifications***Ключевые слова:** *Фазовые переходы, структур, Растворах, превращений, модификации*

Свойства кристаллов во многом определяются условиями их роста, характером дефектов, кансентрацией компенентов, распределением малых примесей и т.д. Применение той или мной технологии для синтеза и получения кристаллов и дальнейшее исползование их важных физических свойств, требует детального изучения реальной структуры, структурных фазовых превращений в них, механизма этих превращений, областей стабильности каждой из модификаций, в том числе и метастабильных, структурного соответствия матричных и новых фаз и т.д.

Рентгендифрактометрических исследований структурных фазовых превращений в бинарных Ag_2S (Se, Te), тройных AgCuSe соединениях и некоторых твердых растворах на их основе.

Каркас решеток большого числа двойных и тройных соединений халькогенидов меди и серебра, независимо от принадлежности их к различным структурным классам, образуется из атомов халькогенов. Атомы металла распределены в пустотах мужду плотноупакованными слоями халькогенов.

В структурах бинарных соединений халькогенидов меди атомы меди находятся в одновалентном Cu^{+1} и двухвалентном Cu^{+2} состояниях. Одновалентные Cu^{+1} в решетке располагаются в центрах треугольников, а Cu^{+2} занимают центры тетраэдров. Высокотемпературная модификация, решетка которой при высокой температуре состоит из упаковки тетраэдров и треугольников, при понижении температуры в процессе упорядочения атомов металла становится двухфазной. По составу одна из фаз близка к стехиометрическому, а другая характеризуется большим дефицитом атомов металла.

В соединениях халькогенидов серебра при низеой температуре атомы металла удовлетворяют условиям стехиометрии. Чтобы выяснить механизм превращений в Ag_2Te , мы будем анализировать полиморфизм бинарных соединений $\text{Ag}_2(\text{Se}, \text{Te})$.

Упорядоченные низкотемпературные модификации халькогенидов серебра характеризуется структурой, в которой число позиции равно числу катионов и анионов. В низкотемпературных модификациях $\text{Ag}_2(\text{Se}, \text{Te})$ каркас матричной решетке упорядоченно и равномерно распределяются между слоями этих анионов.

В таких бинарных соединениях структура стоновится устойчивой тогда, когда каждый ион соприкасается только с ионами противоположного знака. В данном случае ионный радиус катиона остается постаянным, а ионные радиусы анионов увеличиваются, т.е. $\text{S}^{-2} < \text{Se}^{-2} < \text{Te}^{-2}$. отсюда следует, что структура Ag_2S должна быть более устойчивой к внешним воздействиям (температуре или давлению), чем структура Ag_2S и Ag_2Te . Этот факт подтверждает температурная точка структурных превращений в $\text{Ag}_2\text{S}(\text{Se}, \text{Te})$, видно, что температура плавления и микроплотность растет с увеличением размеров анионов.

Это показывает, что температура плавления и микроплотности этих соединений не дают информации об устойчивости кристаллической структуры низкотемпературных модификаций $\text{Ag}_2(\text{Se}, \text{Te})$, так как температура плавления относится к высокотемпературной модификации. Причину превращения решетки низкотемпературный модификации Ag_2Se при более низкой темпуратуре, чем решетка Ag_2S , можно было бы связать со структурой и связью между катионами и анионами.

Но как показано, позиции катионов и анионов в моноклинной решетке Ag_2S и ромбической Ag_2Se идентичны. Структурные данные низкотемпературных модификаций $\text{Ag}_2(\text{Se}, \text{Te})$ приведены в таблица 1

Таблица 1

Структурные параметры низкотемпературной модификации $Ag_2(Se, Te)$

Соединение	Сингония	Параметры элементарной ячейки							
		a, Å	b, Å	c, Å	β	Z	пр, 2P	V, Å ³	ρ_{2/sm^3}
Ag ₂ S	монокл.	4,23	6,91	7,87	99°35'	4	C _{2h} ⁵ -P2 _{1/n}	226,81	7,19
Ag ₂ Se	ромбич.	7,05	7,85	4,33	-	4	C ₂ ² -P222 ₁	239,63	8,11
Ag ₂ Te	монокл.	8,09	4,48	8,96	123°20'	4	C _{2h} ⁵ -P2 ₁₂ 1 ₂ 1	271,32	8,35

Из структурной проекции моноклинной модификации Ag_2Te ясно, что упорядоченное расположение катионов между слоями анионов, т.е. мотив структуры такой же как в Ag_2S и Ag_2Se .

При повышении температуры кристаллы низкотемпературной модификации $Ag_2(Se, Te)$ превращаются в высокотемпературную кубическую модификацию. В трехмерной плотнейшей упаковке обычно число тетраэдрических пустот вдвое больше числа атомов, а число октаэдрических пустот равно числу атомов (катионов). В этих пустотах можно поместит атомы меньшего размера, чем размеры пустот, соприкасающиеся с основными атомами (анионами) радиуса R. Введение решетки определенного типа решающую роль играют относительные размеры ионов, которые выражаются отношением радиусов K(катион): A(анион). отношение ионных радиусов в соединениях $Ag_2(Se, Te)$ равно следующему:

K(катион): A(анион) Ag_2S (0.621) Ag_2Se (0.585) Ag_2Te (0.536)

Сравнением отношений радиусов K/A_a для высокотемпературной модификации $Ag_2(Se, Te)$ выявляется, что граница перехода от объемноцентрированной к гранецентрированной структуре находится между 0,585 и 0,536. Отсюда следует, что как показано в/3/. при больших значениях отношений радиусов появляется объемноцентрированная кубическая структура. Структурные данные высокотемпературной модификации $Ag_2(Se, Te)$ приведены в таблице 2

Таблица 2

Структурные параметры высокотемпературной модификации $Ag_2(Se, Te)$

Соединение	Сингония	Параметры элементарной ячейки				
		a, Å	Z	пр. гр	V, Å ³	$\rho_{г/см^3}$
Ag ₂ S	оцк	4.857	2	O_h^9 -I _m 3 _m	115.075	7,19
Ag ₂ Se	оцк	4.978	2	O_h^9 -I _m 3 _m	123.953	8,11
Ag ₂ Te	оцк	6.585	4	T ² - F23	285.540	8,35

В кубической объемноцентрированной сферической упаковке пустот больше, чем в кубической гранецентрированной упаковке, поэтому относительно большее число катионов приведет к объемноцентрированной структуре. В случае $Ag_2(Se, Te)$ ионный радиус катиона постоянный, поэтому относительно «малые» анионы, т.е. S²⁻ и Se²⁻

Упаковываются в объемноцентрированной кубической, а сравнительно «больше» анионы Te²⁻ в гранецентрированной кубической структуре

ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асадова Ю.Г., Казимов Ш.К. Кристаллическая структура и полиморфные превращения в бинарных халькогенидах серебра, Баку, 1987. 42 стр.
2. Вилке К.Т. Методы выращивания кристаллов, Недра Л, 1968, 420 стр.
3. Тонков Е.Ю. Фазовые диаграммы элементов при высоком давлении, Москва, Наука, 1979. 250стр.

XÜLASƏ

**Şəmsəddin Kazımov
Billurə Hacıyeva
Gülşən Məmmədova**

Gümüş xalkogenidlərin kristallarında bəzi struktur çevrilmələri

Bu məqalənin təhlili nəticəsində müəyyən olunmuşdur ki, rentgendifraksiya üsulu ilə gümüş birləşmə və bərk məhlullarında aşağı temperaturda mövcud olan kation və anionların sayı bərabər olub tetraqonal fazada mövcuddur, yuxarı temperaturda isə səthinə mərkəzləşmiş kub fazasına keçir.

ABSTRACT

**Shamsaddin Kazimov
Billura Hajiyeva
Gulshen Mamedova**

Some peculiarities of structural transformations in crystals of halkogenides of silver

This article is the result of analysis it was found that the combination of silver by the method of rentgendifraksiya and cations and anions present in the amount of solid solutions at low temperatures were equal to the tetragonal phase at temperatures above the surface passes through the face-centred cubic.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə
çapa tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

SEYFƏDDİN CƏFƏROV
FƏRMAN QOCAYEV

Naxçıvan Dövlət Universiteti

UOT: 543.736

**AŞQARLANMIŞ LAYLI A^3B^6 KRİSTALLARI ƏSASINDAKI
HETEROKEÇİDLƏRDƏ ELEKTRON PROSESLƏRİ**

Açar sözlər: heterokeçid, oblast, səviyyələr, elektron prosesləri

Ключевые слова: гетеропереход, область, уровни, электронные процессы

Key words: heterojunction, , junction region, levels, electronic processes

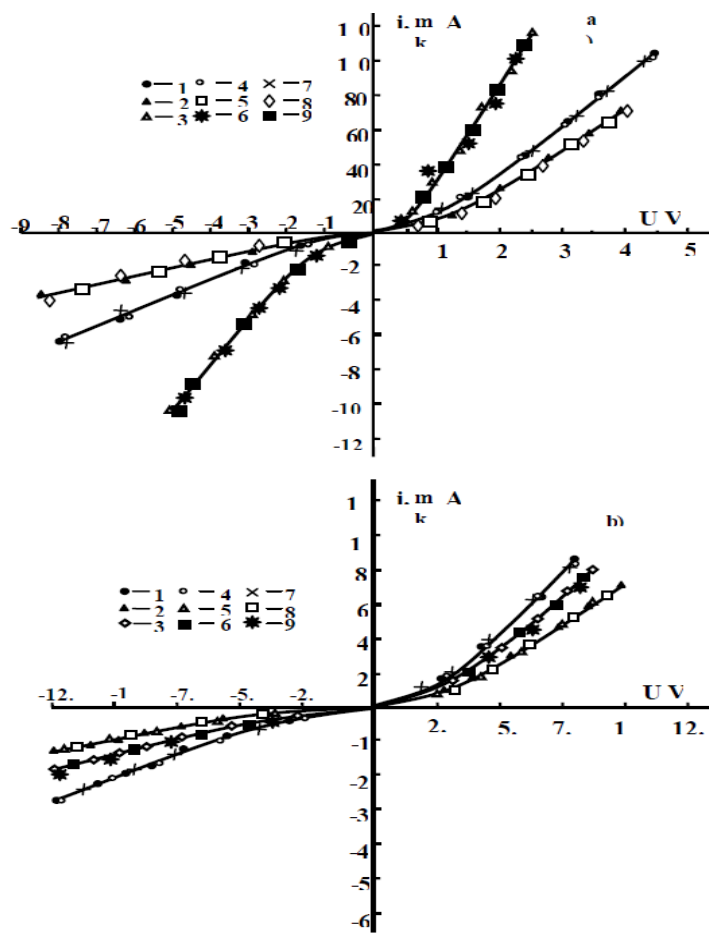
Təqdim olunan iş bəzi lantanoidlərlə müxtəlif atom faizi miqdarında aşqarlanmış qallium və indium monoselenidləri əsasında yaradılmış müxtəlif heterokeçidlərin elektrik və fotoelektrik xassələrinin kompleks tədqiqinə həsr olunmuşdur. Alınmış təcrübi nəticələrin təhlili əsasında laylı quruluşlu qismən nizamsız kristallar əsasında heterokeçidlərin xüsusiyyətləri ümumiləşdirilmişdir.

Laylı AIII BVI monokristalları tipli qismən-nizamsız kristallarda elektron proseslərinin xüsusiyyətləri haqqında məlumatları daha da zənginləşdirmək məqsədi ilə təqdim olunan işdə Gd, Ho və Dy-la (lantanoidlərlə) müxtəlif səviyyədə aşqarlanmış qallium və indium monoselenidlərini optik kontakta gətirməklə [1] yaradılmış heterokeçidlərin elektrik və fotoelektrik xassələrinin kompleks tədqiqi aparılmışdır. Bu məqsədlə təmiz (xüsusi olaraq aşqarlanmamış) və 10-5; 10-4; 10-3; 5·10-3; 10-2; 10-1 at.% lantanoid atomları (Ld) daxil edilmiş p-GaSe və n-InSe monokristallarından istifadə olunmuşdur. İzotip n-InSe/n-CuInSe2 və anizotip p-GaSe/n-InSe heterokeçidlərinin elektrik (şəkil 1 və2), tutum (şəkil 3) və fotoelektrik (şəkil 4) xassələrinin tədqiqindən alınmış nəticələrin müqayisəli təhlili əsasında, laylı kristallar əsasında heterokeçidlərin xüsusiyyətləri ümumiləşdirilmişdir.

Laylı AIII BVI kristallarında səth hallarının sıxlığı çox kiçik olduğundan [2] və optik kontakt üsulu ilə əlavə səth halları əmələ gətirmədiyindən [1] lantanoid atomları daxil edilmiş n-InSe kristalları əsasında səth hallarına daha həssas olan izotip heterokeçidlərin (n-InSe<Ld>/n-CuInSe2) elektrik xassələrini tədqiq etməklə, həcmdə məhz aşqarlama hesabına baş verən proseslər haqqında məlumat toplamaq mümkün olmuşdur. n-InSe<Ld>/n-CuInSe2 heterokeçidlərinin 77÷350K intervalında VAX-ın tədqiqi (şəkil 1) həmin strukturların diod xarakterli olduğunu, parametr və xarakteristikalarının isə n-InSe kristallarına daxil edilmiş lantanoid atomlarının kimyəvi təbiətindən asılı olmayıb, yalnız aşqarlama səviyyəsi ilə təyin edildiyi göstərilmişdir.

n-InSe<Ld>/n-CuInSe2 heterostrukturlarında VAX-ın düzünə istiqaməti, müsbət potensialın daha enli qadağan olunmuş zonaya malik komponentə (n-InSe<Ld>) qoşulduquna uyğun gəlir. Bu heterostrukturların tutumunun tədqiqi isə onların kəskin keçid olduğuna dəlalət edir ki, bu da optik kontakt üsulunun xüsusiyyətlərindən irəli gəlir. n-InSe<Ld>/n-CuInSe2 heterokeçidinin alınmış təcrübi nəticələrə və elmi ədəbiyyatda mövcud olan məlumatlara əsasən qurulmuş zona-enerji diaqramına görə keçirici zonaların kənarlarında ayırma sərhədi yaxınlığında kiçik enerji pikləri əmələ gəlir. 77÷350K intervalında qaranlıq VAX düzünə gərginliyin (U_+) cərəyanına görə kəsilməgərginliyindən (U_0) kiçik qiymətlərdə eksponensial, böyük ($U_+ > U_0$) qiymətlərdə isə xətti qanuna tabe olur. Bu nəticələr həmin heterokeçidlərin ideal kəskin heterokeçidlərə çox yaxın olduğuna dəlalət edir [3]. n-InSe<Ld> komponentinin aşqarlanma səviyyəsindən (N -in qiymətindən) asılı olaraq, keçidin düzünə istiqamətdəki müqaviməti 77 və 300K-də uyğun olaraq $R_{+} = (105 \div 108)$ Om və $R_{+} = (103 \div 105)$ Om həddlərində dəyişir. VAX-ın xətti olduğu hissədə tətbiq edilən gərginlik, demək olar ki, tamamilə yüksəkmüqavimətli komponentin (n-InSe<Ld> təbəqəsinin) ballast hissəsində düşür və N -dəyişdikcə, VAX-ın stabil dərəcəsi və düzünə istiqamətdəki qolunun meyli dəyişir. $N \leq 10-3$ at.% olduqda 77K-də gərginliyin müəyyən kritikdən kiçik olmayan qiymətlərində ($U \geq U_{kr}$) hər iki istiqamətdə keçiddən axan cərəyan asta-asta artır. Çox güman ki, bu

n-InSe<Ld> komponentində elektrik sahəsi ilə stimullaşmış keçiriciliyin yaranması ilə bağlıdır. N-in böyüməsi ilə həmin proses əvvəlcə ($N \leq 10^{-5}$ at.%) güclənir, sonra ($10^{-5} < N \leq 5 \cdot 10^{-3}$ at.%) zəifləyir və nəhayət, $N=10^{-1}$ at.% olduq-da tamamilə baş vermir. Ukr-in qiyməti həm N-dən, həm də temperaturdan asılıdır. N-in dəyişməsi VAX-ın formasına da təsir göstərir. Ən stabil və diod üçün xarakterik VAX $N=10^{-1}$ at.% olan heteroqəçidlərdə müşahidə edilir. Düzünə gərginliyin böyük qiymətlərində strukturun müqaviməti n-InSe<Ld> komponentinin müqavimətinə bərabər olur, VAX isə - başlanğıc eksponensial və xətti hissələrdən sonra həcmi yüklə məhdudlanmış cərəyanlar (HYMC) üçün xarakterik olan şəkllə düşür. Nəhayət, gərginliyin daha böyük qiymətlərində çeviricilik effekti [4, 5] baş verir və tədqiq edilən strukturların müqaviməti və ondan axan cərəyan yalnız n-CuInSe₂ qatı ilə təyin olunur.

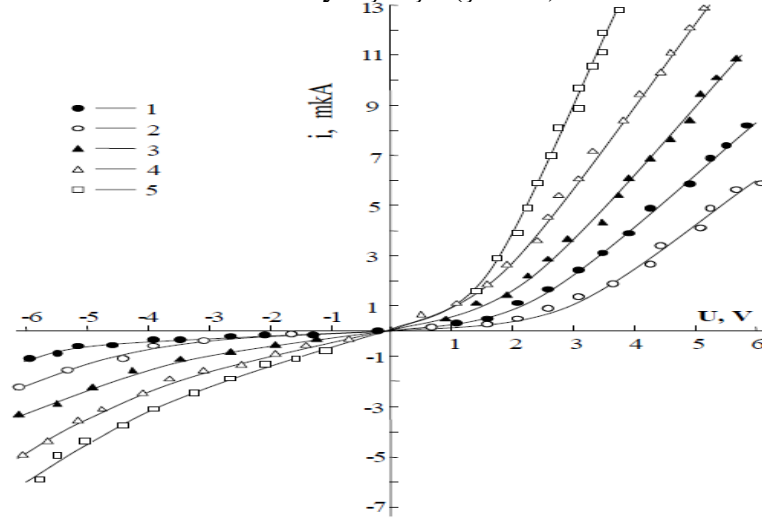


Şəkil 1. Müxtəlif atom faizi miqdarlarında Gd (1-3), Ho (4-6) və Dy (7-9) atomları daxil edilmiş n-InSe kristalları əsasında yaradılmış izotip n-InSe/n-CuInSe₂ heteroqəçidlərinin volt-ampere xarakteristikaları. N, at.%; 1 - 0; 2 - 10⁻⁴; 3 - 10⁻¹. T, K: a - 300; b - 77.

Müəyyənləşdirilmişdir ki, 300K-də n-InSe<Ld> komponentinin qalınlığının və N-in müxtəlif qiymətlərində n-InSe<Ld>/n-CuInSe₂ strukturları üçün $U_0 \approx (0.25 \div 0.30)$ V və bu kəmiyyətin qiyməti N-dən qeyri-monoton asılıdır. Yalnız $N=0$ və $N \approx 10^{-1}$ at.% olduqda U_0 -ın qiyməti kontakt potensialları fərqi ilə yaxşı uzlaşır. 77K-də $U_0 \approx 2.5$ eV olur və N artırıldıqca, əvvəlcə ($N \leq 10^{-5}$ at.%) hətta 3.0 V-a çatır, sonra isə azalır və $N=10^{-1}$ at.% olduqda 1.5 V-a qədər enir. U_0 -ın bu qiymətlərinin hamısı kontakt potensialları fərqi ilə kifayət qədər böyükdür. Bunun tətbiq edilən gərginliyin bir hissəsinin həmin şəraitdə n-InSe<Ld> qatının həcmindəki irimiqyaslı qeyribircinsliklərdə düşməsi ilə bağlı olduğu fərz edilir. Əksinə gərginliyin kiçik qiymətlərində bu

heteroqəçidlərin qaranlıq statik VAX-ı eksponensial qanuna tabedir və həcmi yüklər təbəqəsinin n-CuInSe₂ tərəfindəki qalınlığı keçirci zona yaxınlığında çox kiçikdir (10-5sm-dən də az). Ona görə də fərz etmək olar ki, sərbəst yükdaşıyıcılar (elektronlar) kontaktdakı enerji «pik»indən tunel edərək keçə bilər. Əksinə gərginliyin böyük, daha doğrusu tunel müqaviməti, n- InSe<Ld> qatının müqavimətindən böyük olmadığı qiymətlərində VAX düzünə istiqamətdə olduğu kimi, xətti hissəyə çıxır. 77K-də əksinə gərginliyin böyük qiymətlərində n-InSe<Ld> qatının ballast hissəsinə injeksiya nəticəsində VAX-ın superxəttiliyi müşahidə olunur. n-InSe<Ld> layının qalınlığı $d \geq 10^{-4}$ sm olduğundan həm düzünə, həm də əksinə istiqamətdə yükdaşıyıcıların keçiddən tunel etməsini nəzərə almamaq mümkündür. Gərginliyin böyük qiymətlərində hər iki istiqamətdə strukturdan axan cərəyan yalnız n-InSe<Ld> qatının müqaviməti ilə məhdudlandığından yüksək fotohəssaslıq əlaməti həmin qat tərəfdən işıqlandırıldıqda cərəyanın kəskin artması, U_0 -ın isə bir neçə dəfə kiçilərək, kontakt potensial fərqinə yaxınlaşması baş verir. Təmasa gətirilmiş komponentlərin hər ikisi lanta-noidlə əşqarlanmış laylı AIIIIVI kristalı olduqda optik kontakt üsulu ilə yaradılmış heteroqəçidlər daha keyfiyyətli, ideala yaxın olmaqla bərabər, həm də hər iki komponentin qeyri-adi elektron xassələrinə malik olması hesabına böyük maraq kəsb edir. p-GaSe<Ld>/n-InSe<Ld> heteroqəçidlərinin müqaviməti müxtəlif amillərdən asılı olaraq $R_0 \approx (1.5 \div 2.0) \cdot 10^6 \text{Om}$ intervalında dəyişir və hər iki istiqamətdə gərginliyin böyük qiymətlərində ikipilləli bistabil çeviricilik effekti baş verir. Əksinə istiqamətdə $U < U_{\text{çev}}$ olduqda, cərəyan əvvəlcə çox zəif ($i \sim U^{0.5 \div 0.8}$ qanunu ilə), sonra isə kvadratik qanunla artır.

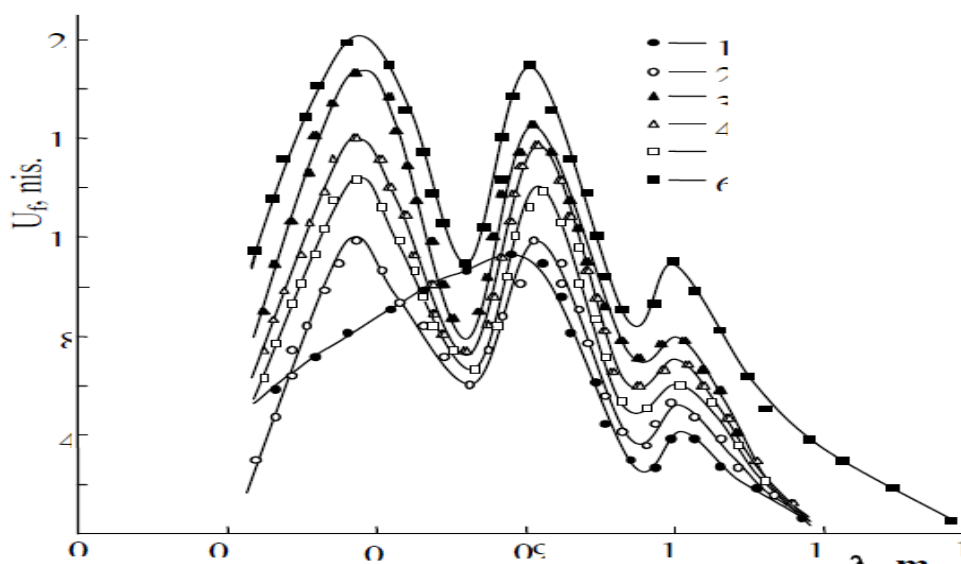
N- yüksəldikcə strukturun diod xassələri yaxşılaşır (şəkil 2).



Şəkil 2. Müxtəlif atom faizi miqdarlarında Gd atomları daxil edilmiş p-GaSe və n-InSe kristalları əsasında yaradılmış p-GaSe/n-InSe heteroqəçidlərinin volt-ampere xarakteristikaları. N, at. %: 1 - 0; 2 - 10⁻⁴; 3 - 10⁻³; 4, 5 - 10⁻¹. T=300 K.

Temperatur azaldıqca, hər iki istiqamətdə müqavimətin qiyməti böyüyür, strukturun diod xassələri pisləşir və 77K-də $U=3V$ olduqda düzləndirmə əmsalı (kd) 2-dən böyük olur. Böyük gərginliklərdə isə bistabil çeviricilik effekti baş verir. 300K-də $U \leq 3V$ olduqda N-in qiymətindən asılı olaraq $kd \approx 4 \div 6$ aralığında dəyişir və N-dən asılı olaraq artır. $T > 300K$ -də temperaturun yüksəlməsi ilə bu strukturların diod xassələri əvvəlcə bir qədər yaxşılaşır, sonra isə ($T > 350K$ olduqda) yenidən pisləşir, lakin cərəyan 300 K-dəkinən nisbətən nəzərə qarşıqcaq dərəcədə böyük olur. Strukturları məxsusi işıqla p-GaSe<Ld> tərəfdən işıqlandırıldıqda U_0 çox cüzi, n-InSe<Ld> tərəfdən işıqlandırıldıqda isə - əhəmiyyətli dərəcədə kiçilir. Temperaturun aşağı düşməsi ilə işığın U_0 -a təsirindəki asimmetriya güclənir. p-GaSe<Ld>/n-InSe<Ld> heteroqəçidlərində düzünə istiqamətdə kiçik gərginliklərdə VAX-ın ifadəsindəki 0 i -kəmiyyəti [3] temperaturdan asılı olaraq $i \sim \exp(-i/kT) - \Delta \epsilon$ qanunu ilə dəyişir. Bu asılılıqdan $\Delta \epsilon$ -nın təyin edilmiş qiyməti ($\sim 0.40 \text{ eV}$) əşqarlanmadan asılı deyil və GaSe<Ld>-də dayaz α -tutma mərkəzlərinin HYMC-a əsasən tapılmış enerji dərinliyinin qiyməti ilə yaxşı uyğun gəlir.

77 K-də n-InSe<Ld> tərəfdən işıqlandırılmış n- InSe<Ld>/n-CuInSe2 strukturlarının fotohəssaslığının spektri N=10-5at.-%-də $0.30 \leq \lambda \leq 1.35$ mkm oblastını əhatə edir. Spektrin əsas maksimumu $\lambda_m=1.00$ mkm-ə uyğun gəlir, ikinci maksimum isə yox olur. N-in sonrakı böyüməsi ilə qısaqapanma cərəyanının spektrinin eni daralır və N=10- 1at.-%-də maksimumları $\lambda_m=0.90$ mkm və $\lambda=1.00$ mkm-də yerləşməklə $0.40 \leq \lambda \leq 1.10$ mkm oblastını əhatə edir. Bu strukturların fotohəssaslığı yalnız N-dən asılı olur, aşqarların kimyəvi təbiətindən asılılıq isə müşahidə edilmir. n-InSe<Ld>/n-CuInSe2 heteroqəçidlərində $\epsilon g_1 \leq hv \leq \epsilon g_2$ enerjili (burada ϵg_1 və ϵg_2 -uyğun olaraq n-CuInSe2 və n-InSeiqadağan olunmuş zonalarının enidir) işıqla işıqlandırdıqda fotosiqnal müşahidə edilmir. $hv > \epsilon g_2$ enerjili işıqla işıqlandırıldıqda qısaqapanma cərəyanının spektri n- InSe<Ld>-in fotoqəçiriciliyinin spektrindən fərqli olaraq qısa dalğalar tərəfdən kəskin şəkildə kəsilir. n-CuInSe2 tərəfdən işıqlandırdıqda isə hər iki rejimdə 77 K-də fotosiqnal n- InSe<Ld> tərəfdən işıqlandırıldığı haldakı ilə müqayisədə kiçilir. Fotoe.h.q.-nın (U_f) işığın intensivliyindən (Φ) asılılığının diodlardakına yaxşı uyğun gəlməsi, n-InSe<Ld> və n- CuInSe2 kristallarını optik kontakta gətirdikdə diod strukturlarının yaranmasını bir daha sübut edir. Fotovoltaik effektin baş verməsi və yaranan fotogərginliyin mənfi qütübünün n-InSe<Ld>-na uyğun olması n-InSe<Ld> və p-GaSe<Ld> kristallarını optik kontaktagətirdikdə onların təmas sərhədində anizotip heteroqəçidinyarandığına daha bir sübutdur.



Şəkil 3. Müxtəlif atom faizi miqdarlarında Gd atomları daxil edilmiş n-InSe və p-GaSe kristalları əsasında p-GaSe/n- InSe anizotip heteroqəçidlərinin fotohəssaslığının spektralpaylanması. N, at.%. 1 - 0; 2, 3 - 10-4; 4 - 10-3; 5,6 -10-1.

T=300 K1-də işıq n-InSe; 2÷6-da isə p-GaSe komponenti tərəfdən düşür.

n-InSe<Ld>/p-GaSe<Ld> heteroqəçidlərində fotogərginliyin spektrinin (şəkil 3) həm N-dən, həm də işıqlandırılmanın istiqamətindən asılı olduğu aşkaredilmişdir. n-InSe<Ld> tərəfdən işıqlandırıldıqda qısaqapanma cərəyanının spektri n-InSe<Ld>-in fotoqəçiriciliyinin spektri ilə üst-üstə düşür. N≈10-5 at.% olduqda isə, heteroqəçidin fotohəssaslığı təmiz n-InSe əsasında kılara nəzərən xeyli böyüyür. N-in sonrakı artması ilə, fotohəssaslıq əvvəlcə (N=10-4 at.-%-ə qədər) böyüməkdə davam edir, sonra isə (10-4 < N ≤ 10-1 at.%) azalaraq, təmiz kristallardakına yaxınlaşır. N-in dəyişməsi ilə fotohəssaslığın spektrinin eni də fotohəssaslığın ədədi qiyməti kimi, əvvəlcə ilkin haldakına nəzərən artır, sonra isə azalır. Bu zaman heterostrukturun parametr və xarakteristikalarının stabillik, eləcə də təkrarlanma dərəcəsi də qeyri-monoton dəyişir və N=10-2 ÷ 10-1 at.% olduqda özünün ən yüksək qiymətini alır. n-InSe<Ld>/p-GaSe<Ld> strukturlarını p-GaSe<Ld> tərəfdən işıqlandırdıqda qısaqapanma cərəyanının spektri, n InSe<Ld> tərəfdən işıqlandırılan haldakına nəzərən əhəmiyyətli dərəcədə genişlənir və müxtəlif strukturlar üçün 0.30 mkm-dən 1.30÷1.45 mkm-ə qədər geniş bir oblastı əhatə edir. N≤10-5at.-%-də spektrin qırmızı sərhədi $\lambda \approx 1.45$ mkm-ə uyğun gəlir, N-in sonrakı (N≈10-1 at.-%-ə qədər) artmasında isə tədricən

$\lambda \approx 1.30$ mkm-ə qədər sürüşür. p-GaSe<Ld> tərəfdən işıqlandırdıqda spektrdə p-GaSe<Ld>-ə və n-InSe<Ld>-ə uyğun iki ($\lambda_1 \approx 0.58$ mkm və $\lambda_2 \approx 0.95 \div 1.08$ mkm) maksimum müşahidə olunur. n-InSe<Ld>-in aşqarlanmasəviyyəsini dəyişdikcə λ_2 öz yerini $0.95 \div 1.08$ mkm intervalında dəyişir. Bu strukturları p-GaSe<Ld> tərəfdən işıqlandırdıqda qısa dalğalar oblastında dalğa uzunluğunun kiçilməsi ilə fətohəs-saslıq kəskin düşür, əks tərəfdən işıqlandırdıqda isə belə kəskin düşmə tədrici azalma ilə əvəz olunur. n-InSe<Ld>/p-GaSe<Ld> heterostrukturlarının işıq xarakteristikalarının fotodiod və ventil rejimlərində tədqiqi nəticəsində müəyyən-ləşdirilib ki, hər iki halda fotogərginliyin işığın intensivliyindən asılılığı subxətti xarakterə malik olsa da, fotodiod rejimində daha dikedir. Fotoe.h.q.-nin maksimal qiyməti p-GaSe<Ld> tərəfdən işıqlandırıldıqda təmin olunur. Işıqlandırılma dar qadağan olunmuş zonalı komponent (n-InSe<Ld>) tərəfdən həyata keçirildikdə fətohəs-saslıq spektri bu materialın fətohəs-saslıq spektrindən yalnız qısa dalğalar ($\lambda \leq 0.50$ mkm) oblastında kəsilməsi ilə fərqlənir. Bu kəsilmə uyğun komponentin qalınlığının yükdaşıyıcıların diffuziya uzunluğundan böyük olması ilə əlaqələndirilir. p-GaSe<Ld> tərəfdən işıqlandırdıqda isə fotoe.h.q.-nin spektrində iki oblast müşahidə olunur. Optimal şəraitdə p-GaSe<Ld>/n-InSe<Ld> heterostrukturlarında boşuna gediş gərginliyi və qısaqapanma cərəyanı uyğun olaraq ~ 0.34 V və ~ 32 mka/sm²-ə çatır. n-InSe<Ld>/p-GaSe<Ld> heterostrukturlarında əksinə cərəyanın VAX-ın başlanğıc hissəsində zəif artması, əksinə sızma cərəyanının təyinedici rol oynaması ilə, qeyri-ideallıq məmsalının böyük ($\beta = 2 \div 4$) olması isə həcmi yüklər oblastında yükdaşıyıcıların rekombinasiyası ilə izah oluna bilər. Bu heterostrukturlarda U_0 üçün daha yüksək dərəcədə təkrarlanan qiymətlər alınır və bu qiymətlər uyğun doyma fotogərginliyi ilə üst-üstə düşür. N-in böyüməsi ilə U_0 -ın dəyişməsi, ilk növbədə, n-InSe<Ld> layının fəzaca nizamsızlıq dərəcəsinin N-dən asılılığı ilə izah oluna bilər. Baxmayaraq ki, p-GaSe<Ld> monokristalları da fəzaca nizamsızdır, lakin ölçmələrin aparıldığı nisbətən yüksək temperaturlarda bunu nəzərə almamaq olar. Ona görə də n-InSe<Ld> kristallarının qismən-nizamsızlıq dərəcəsinin N-in artması ilə dəyişməsi tədqiqatlarda məhz düzünə cərəyanın VAX-ın qeyri-eksponensial hissəsindəki qiymətinin dəyişməsində və U_0 -ın qiymətlərində təzahür edir. p-GaSe<Ld>/n-InSe<Ld> heterostrukturlarının VAX-ının ifadəsində A-parametrinin temperaturdan asılı olmaması yükdaşıyıcıların bu keçidlərdən tunel yolu ilə daşınmasının üstünlük təşkil etdiyini göstərir. Lakin bu halda təmasa gətirilmiş p-GaSe<Ld> və n-InSe<Ld> monokristallarının qadağan olunmuş zonalarındakı lokal səviyyələrin rolunu da nəzərə almamaq olmaz. Həmin səviyyələr, baxılan şəraitdə keçiddən yükdaşıyıcıların tunel-rekombinasiya mexanizmini təmin edir. N-in artırılması ilə əksinə cərəyanın qiymətinin böyüməsi göstərir ki, lantanoid ionları p-GaSe və n-InSe kristallarındakı elektron proseslərində dayaz α -tutma mərkəzlərinin rolunu artırır. Bu zaman həmin kristalların nizamsızlıq dərəcəsinin N-dən asılılığını da nəzərə almaq lazımdır.

n-InSe<Ld>/n-CuInSe₂ heterokeçidlərinin fotoelektrik xassələrinin xüsusiyyətlərini isə valent zonada enerji çəpərinin mövcudluğu ilə izah etmək olar. Bu çəpər strukturun-CuInSe₂ tərəfdən işıqlandırdıqda yaranan elektron-deşik cütünün fəzaca bir-birindən ayrılmasına mane olur. Bu halda, keçirici zonanın daha yüksək səviyyələrinə düz keçidlərin baş verməsi ilə əlaqədar n-InSe<Ld> layında yüksək enerjili fotonların nüfuz etmə dərinliyinin kiçilməsini və n-InSe<Ld> komponentinin fəzaca nizamsızlıq dərəcəsinin N-dən asılılığını da nəzərə almaq lazımdır. Alınmış nəticələr göstərir ki, n-InSe<Ld>/n-CuInSe₂ heterostrukturlarının parametr və xarakteristikalarının N-i dəyişməklə idarə etmək mümkündür. n-InSe<Ld>/n-CuInSe₂ heterostrukturlarının xassələrinin yalnız N-dən asılı olub, daxil edilən lantanoidlərin kimyəvi təbiətindən asılı olmaması göstərir ki, n-InSe-nin lantanoidlərlə aşqarlanmasının bu kristallarda baş verən generasiya və rekombinasiya proseslərinə təsiri, həmin atomların fərdi elektron strukturları ilə (mərkəzdaxili effektlərlə) bağlı olmayıb, yalnız n-InSe kristallarının xüsusiyyətləri ilə təyin edilir. n-InSe<Ld>/n-CuInSe₂ strukturlarını enli (eg_1) qadağan olunmuş zonalı (n-InSe<Ld>) komponent tərəfdən işıqlandırdıqda onun fətohəs-saslıq spektrində ikinci daha zəif maksimumun əmələ gəlməsi "pəncərə effekti" [3] ilə bağlıdır. n-InSe<Ld>/n-CuInSe₂ strukturlarını n-CuInSe₂ tərəfdən, $eg_2 \leq h\nu < eg_1$ enerjili fotonlarla işıqlandırdıqda fotosiqnalın müşahidə olunmaması isə, işığın tamamilə n-CuInSe₂ komponentində udulması ilə izah edilə bilər. Bu halda baxılan strukturun valent zonasında potensial çəpərin yaranması nəticəsində n-CuInSe₂ təbəqəsində

generasiya olunmuş tarazlıqda olmayan dəşiklər n-InSe<Ld> təbəqəsinə keçə bilmir. Ona görə də strukturda fotogərginlik yaranmır.

n-CuInSe₂ komponenti tərəfdən işıqlandırılma halında fətohəssaslığın çox kiçik olması da məhz bu mövqedən izah edilə bilər. n-InSe<Ld> tərəfdən hv>eg enerjili fotonlarla işıqlandırıldıqda spektrin qısdalğalı hissəsinin n-InSe<Ld>-in spektrindən fərqlənməsi isə, qısa dalğalı fotonların nüfuz etmə dərinliyinin kiçilməsi ilə əlaqədardır. Bunun nəticəsində işığın təsiri ilə yaradılmış elektron-dəşik cütü həmin komponentin keçiddən çox uzaq olan hissəsində generasiya olunur və onların hetero keçidin çəpəri vasitəsi ilə bir-birindən ayrılması baş vermir. n-InSe<Ld>/p-GaSe<Ld> hetero keçidlərini müxtəlif tərəfdən işıqlandırıldıqda işıqlandırmanın VAX-a və U0-ın qiymətinə təsirinin bir-birindən fərqlənməsi, çox güman ki, təmasa gətirilmiş komponentlərin fətohəssaslığının müxtəlif olmasından irəli gəlir. Bu halda da hetero keçidin enliqadağan olunmuş zonaya malik komponent (p-GaSe<Ld>) tərəfdən işıqlandırılmasında fətohəssaslığın spektrin enlənməsi "pəncərə effekti", fətohəssaslığın qısa dalğalar oblastında kəskin düşməsinə isə - p-GaSe<Ld>-də işığı yaratdığı yükdaşıyıcıların «C» oxu istiqamətində diffuziyə uzunluğunun təbəqənin qalınlığından kiçikliyi ilə bağlıdır. n-InSe<Ld> komponenti üçün isə vəziyyət bir qədər başqadır.

Bu təbəqə daha nazikdir və tarazlıqda olmayanyükdaşıyıcıların buradakı diffuziya uzunluğu, p-GaSe<Ld>-dəkinə nisbətən böyükdür. Bu səbəbdən də n-InSe<Ld>/p-GaSe<Ld> hetero keçidlərini n-InSe<Ld> komponenti tərəfdən işıqlandırdıqda fətohəssaslığın qısdalğalı sərhədi yastı olur. n-InSe<Ld>/p-GaSe<Ld> hetero strukturlarını n-InSe<Ld> tərəfdən işıqlandırdıqda fətohəssaslığın spektrin n-InSe<Ld> kristallarının fətohəssaslıq diapazonu ilə məhdudlanmasını işığın dar qadağan olunmuş zonaya malik n-InSe<Ld> təbəqəsində udulması və p-GaSe<Ld> təbəqəsinə keçə bilməməsi ilə bağlamaq olar. Bu strukturlar fotodiod rejimində olduqda, işığın yaratdığı elektron-dəşik cütünün ayrılması prosesi keçiddəki sahə təsiri ilə güclənir. Ona görə fotosignalin işıq xarakteristikaları ventill rejimindəkindən daha dik olur.

ƏDƏBİYYAT

1. В.Л. Бакуменко, В.Ф. Чишко // Физ. и техн. полупроводников, Т.11, 11, с. 2000 (1977)
2. З.С. Медведева Халькогениды элементов III Б подгруппы периодической системы. М.: Наука, 214 с.(1968)
3. Б.Л. Шарма, Р.К. Пурухит Полупроводниковые гетеропереходы. М.: Советское радио, 228 с.(1979)
4. А.Ш. Абдинов, Р.Ф. Бабаева, Р.М. Рзаев, А.Т. Багирова, Ш.А. Аллахвердиев // Изв. НАНАзербайджана, Баку, Т. XXVI, 5, с. 70 (2006)
5. А.Ш. Абдинов, Р.Ф. Бабаева, А.Т. Багирова, Р.М. Рзаев, Г.Х. Эйвазова // Ж. «Неорганические материалы». Т.42. 9. С.1035. (2006)

РЕЗЮМЕ

Сейфаддин Джафаров, Фарман Годжайев

В представленной работе даны результаты комплексного исследования электрических и фотоэлектрических свойств различных гетеропереходов, созданных на основе моноселенидов галлия и индия, легированных некоторыми лантаноидами с различным процентным содержанием. На основе полученных экспериментальных результатов обобщены свойства гетеропереходов на основе неупорядоченных кристаллов со слоистой структурой.

ABSTRACT

Seyfaddin Jafarov, Farman Qojayev

The paper is devoted to combined investigation of electric and photoelectric properties of several heterojunctions manufactured on the basis of monoselenides of gallium and indium doped by any lanthanides with several atomic percent. The peculiarities of heterojunctions on the basis of disordered crystals with layered structure were summarized by discussion of prepared results.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə çapa tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

АЛИ БАБАЕВ,
САРА ЯСИНОВА

Нахичеванский Государственный Университет

УДК 539

ОСОБЕННОСТИ ПОЛИМОРФНЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ В В КРИСТАЛЛЕ
AG_{0.40}Cu_{1.60}Se

Açar sözlər: *polimorf çevrilmələr, komponent, sintez, modifikasiya, rentgenogramma*

Ключевые слова: *полиморфные превращения, компонент, синтез, модификация, рентгеннограмма*

Key words: *polymorphic transformations komponent, synthesis, modification, rentgenogramma*

1. Синтез Cu_{0.40}Cu_{1.60}Se.

Для синтеза состав указанных состав также выбирали метод прямого синтеза. Были выбраны одиноковые условия синтеза Ag_{1.50}Cu_{0.50}Se, Ag_{0.40}Cu_{1.60}Se, которые отличались от условий синтеза Cu_{1.80}Zn_{0.20}Se, Cu_{1.75}Zn_{0.05}Se, а это отличалось от условий синтеза AgCuSe_{0.50}(S,Te)_{0.50}.

Для синтезируемых состав в качестве реактора были применены ампулы из высококачественного кварца с внутренним диаметром 1.2 см и длиной 10 см, который обладает большой термической стойкостью и обеспечивает качественную герметичность, что исключает загрязнение и окисление синтезируемых веществ в случае растрескивание одной из двух ампул. Ампулы заполнялись исходными веществами Cu, Ag, Zn, Se, S и Te в количествах, необходимых для каждого состава и эвакуировались до давления 10⁻³Па, а затем запаивались. В таблице 1 указано исходных элементов в ат.% для каждого состава. Участвующие в составах исходные компоненты имели следующую чистоты: Cu-электролитическая, Ag-99,999, Zn-99,999, Se, S и Te марки «B5».

Таблица 1.

Атомные проценты компонентов в вышеуказанных составах

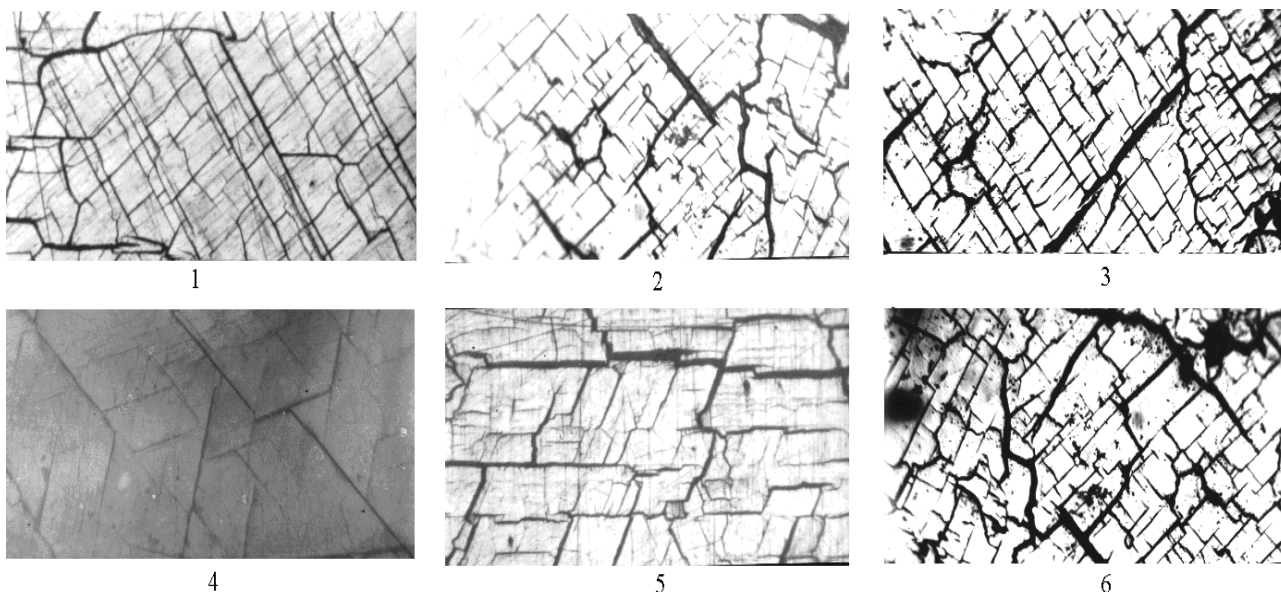
Состав	Cu, ат.%	Ag, ат.%	Zn, ат.%	Se, ат.%	Te, ат.%	S, ат.%
Ag _{1.50} Cu _{0.50} Se	16.6666	49.9999	-	33.3333	-	-
Ag _{0.40} Cu _{1.60} Se	45.4311	19.2836	-	35.2853	-	-
Cu _{1.80} Zn _{0.20} Se	55.458	-	6.162	38.380	-	-
Cu _{1.75} Zn _{0.05} Se	57.488	-	1.690	40.822	-	-
AgCuSe _{0.50} S _{0.50}	27.9995	47.5383	-	17.3972	-	7.0651
AgCuSe _{0.50} Te _{0.50}	33.3333	33.3333	-	16.6666	16.6666	-

Для достижения одиноковых условий синтеза ампулы с составами Ag_{1.50}Cu_{0.50}Se и Ag_{0.40}Cu_{1.60}Se помещали в печь одновременно таким образом, чтобы часть ампул находилась в стабильной температурной зоне печи. Так же были ампул с состав Ag_{0.40}Cu_{1.60}Se помещались в печь. С целью предотвращения взрыва, а также для полной диффузии расплавленного селена с медью температуры печи медленно повышали до температуры плавления селена (T_{пл.}=493К) и поддерживалась при этой температуре 4 часа. После этого температуру печи повышали со скоростью 50К/час выше температуры плавления AgCuSe (T_{пл.}=1039К). После трех часовой выдержки при этой температуре циклическим вибрированием, ампулы с образцами медленно охлаждали до

400К и при этой температуре, с целью гомогенизации, полученные образцы отжигались в течение 200 часов. Для установления индивидуальности синтезированных образцов был проведен также микроструктурный и рентгенофазовый анализ.

а) Микроструктурный анализ

Поверхности всех образцов после шлифовки и полировки тщательно промывались, обезжиривались этиловым спиртом и высушивались. Состав травителя подбирали экспериментальным путем и состоял из 75% HNO_3 +25% H_2O . Фиксированные микроструктуры образцов каждого состава приведены на рис.1 снятые также на вертикальном металлографическом микроскопе «МИМ-7» при одиноковых увеличениях(340 \times).Из микрофотографий синтезированных образцов выявлена их однофазность, которая характеризуется структурой без каких-либо включений (рис.1).



Şek.1.Mikroquruluşlar: $\text{Ag}_{1.50}\text{Cu}_{0.50}\text{Se}$ (1), $\text{Ag}_{0.40}\text{Cu}_{1.60}\text{Se}$ (2), $\text{Cu}_{1.80}\text{Zn}_{0.20}\text{Se}$ (3), $\text{Cu}_{1.75}\text{Zn}_{0.05}\text{Se}$ (4), $\text{AgCuSe}_{0.50}\text{S}_{0.50}$ (5), $\text{AgCuSe}_{0.50}\text{Te}_{0.50}$ (6).Böyütmə 340 \times .

Как будет показано ниже рентгенофазовым анализом, из синтезированных образцов при комнатной температуре некоторые двухфазные, а $\text{AgCuSe}_{0.50}\text{Te}_{0.50}$ -трехфазный. Как видно из рис.1 микроструктуры этих фаз заметно не отличались.

б) Рентгенофазовый анализ

При определении однофазности одного и того же химического состава рентгенофазовый анализ является совершенно незаменимым. Если в синтезированном составе участвуют различные фазы, то каждая фаза характеризуется своей рентгенограммой, т.е. дифракционными отражениями с соответствующим набором межплоскостных расстояний и интенсивностей соответствующих отражений.

Для установления однофазности из каждого синтезированного состава изготовлялся порошок, который заполнялся в стеклянный капилляр с внутренним диаметром ~ 0.8 мм, и выдавливанием его из капилляра проволокой диаметром ~ 0.7 мм, получались спрессованные образцы в виде проволоки. От таких образцов каждого состава $\text{Ag}_{1.50}\text{Cu}_{0.50}\text{Se}$ и $\text{Ag}_{0.40}\text{Cu}_{1.60}\text{Se}$ снимались порошграммы в камере РКД 57.3 на CuK_α ($\lambda_\alpha=1.5418\text{Å}$) излучении, фильтр-Ni, экспозиция 16 часов.

На основе вычисленных межплоскостных расстояний определены параметры элементарной ячейки и показано, что составы $\text{Ag}_{1.50}\text{Cu}_{0.50}\text{Se}$ и $\text{Ag}_{0.40}\text{Cu}_{1.60}\text{Se}$ при комнатной температуре двухфазные, которые состоят из AgCuSe и Ag_2Se .

2. Структурные аспекты полиморфных превращений в $\text{Ag}_{0.40}\text{Cu}_{1.60}\text{Se}$

При комнатной температуре от кристаллического слитка $\text{Ag}_{0.40}\text{Cu}_{1.60}\text{Se}$ произвольной ориентации вырезались образцы размером $2 \times 4 \times 6$ мм. От этого образца в интервале углов $10^\circ \leq 2\theta \leq 110^\circ$ зафиксированы 18 четких дифракционных отражений (см. рис.2 и таб.2). Как видно из таблицы 2 из 18 отражений четырнадцать индицируются на основе параметров орторомбической модификации AgCuSe , а оставшиеся четыре и семь из четырнадцати индицируются также на основе параметров орторомбической модификации Ag_2Se . Отсюда следует, что кристаллы $\text{Ag}_{0.40}\text{Cu}_{1.60}\text{Se}$ при комнатной температуре двухфазные, как и кристаллы $\text{Ag}_{1.50}\text{Cu}_{0.50}\text{Se}$.

После записи дифракционных отражений при комнатной температуре, не изменяя ориентации кристалле, включили печь и через каждые 50 К проводили контрольные дифракционные записи. Температура образца перед началом каждой записи поддерживалась постоянной в течение 50 мин. Как видно из табл.2 в интервале температур 293-523К в числах и интенсивностях дифракционных отражений изменения не происходили. При 573К все дифракционные отражения исчезают и в прежнем интервале углов фиксируется 7 новых отражений, принадлежащие высокотемпературной ГЦК модификации с параметром элементарной ячейки $a=5.896 \text{ \AA}$. Для определения температуры равновесия между низко- и высокотемпературными модификациями $\text{Ag}_{0.40}\text{Cu}_{1.60}\text{Se}$ счетчик дифрактометра был установлен на максимума интенсивности отражения от плоскости (0.10.0) орторомбической модификации, которая исчезает при превращении в ГЦК модификацию, и наоборот восстанавливается при охлаждении. Этим способом уточнены температура превращения, которая равна $504 \pm 2 \text{ К}$. Превращения в AgCuSe обратимое и происходят по типу монокристалл-монокристалл.

На рис.2 приведены температурные зависимости параметров решетки обеих орторомбических и ГЦК модификаций $\text{Ag}_{0.40}\text{Cu}_{1.60}\text{Se}$. Как видно из рис.2 при температуре 473К параметры модификации, крадстиллизующейся в структуре AgCuSe , резко отклоняются от линейности, и параметры a и b в Ag_2Se модификации при 473К также отклоняются от линейности, а параметр c до температуры превращения сохраняет линейность. Отклонение параметров от линейности при 473К обеих орторомбических модификаций в основном связано с перераспределением двух сортов катионов.

На рис.2 представлены температурные зависимости плотности существующих модификаций. При превращении низкотемпературной орторомбической модификации AgCuSe и Ag_2Se в единую ГЦК модификацию разница плотности обеих модификаций составляет $\Delta\rho_1=0.70 \text{ г/см}^3$ и $\Delta\rho_2=0.47 \text{ г/см}^3$ соответственно. Как было отмечено, это приводит к монокристалл-роликристал превращению.

Таблица 2

Расчет дифрактограммы $\text{Ag}_{0.40}\text{Cu}_{1.60}\text{Se}$ записанной при различных температурах.
Изл. $\text{CuK}\alpha$ ($\lambda_\alpha=1.5418 \text{ \AA}$), фильтр-Ni, режим: 35кВ, 10мА.

$T_{\text{экс. К}}$	I/I_0	$d_{\text{экс}} \text{ \AA}$	AgCuSe		Ag_2Se		Параметры кристаллической решетки
			$d_{\text{экс}} \text{ \AA}$	hkl	$d_{\text{экс}} \text{ \AA}$	hkl	
1	2	3	4	5	6	7	8
	60	3.3916	3.3917	060	-	-	
	40	2.8916	2.8902	150	-	-	AgCuSe
	50	2.6143	-	-	2.6121	022	Орторомбическая
	40	2.4836	2.4828	112	-	-	$a=4.1038 \text{ \AA}$
	80	2.2203	2.2207	171	2.2219	103	$b=20.3496 \text{ \AA}$
	40	2.1175	-	-	2.1194	113	$c=6.3096 \text{ \AA}$

1	2	3	4	5	6	7	8
	100	2.0362	2.0350	0.10.	-	-	Z=10
	10	1.8484	-	-	1.8466	220	пр.гр. P4/nmm
293	90	1.7554	1.7560	260	-	-	$\rho=7.885\text{г/см}^3$
	10	1.5728	1.5739	173	-	-	
	10	1.5122	-	-	1.5166	015	
	30	1.4609	1.4625	0.10.	1.4618	105	Ag ₂ Se, Орторомбическая
	10	1.3390	1.3406	084	1.3379	224	a=4.333Å
	20	1.2006	1.2042	115	-	-	b=7.062Å
	20	1.1882	1.8676	135	1.1885	225	c=7.764Å
	10	1.1378	1.1309	333	1.1358	160	Z=4
	10	1.0317	1.0323	314	1.0322	412	пр.гр. P2 ₁ 2 ₁ 2 ₁
	10	0.9844	0.9823	460	0.9841	430	$\rho=8.237\text{г/см}^3$
	60	3.4005	3.3993	060	-	-	
	40	2.8959	2.8940	150	-	-	AgCuSe
	50	2.6194	-	-	2.6180	022	Орторомбическая
	40	2.4884	2.4853	112	-	-	a=4.1048Å
	80	2.2255	2.2239	171	2.2228	103	b=20.3960Å
	40	2.1202	-	-	2.1209	113	c=6.3180Å
	100	2.0389	2.0396	0.10.	-	-	Z=10
	10	1.8505	-	-	1.8506	220	пр.гр. P4/nmm
373	90	1.7572	1.7571	260	-	-	$\rho=7.858\text{г/см}^3$
	10	1.5742	1.5760	173	-	-	
	10	1.5131	-	-	1.5171	015	Ag ₂ Se
	30	1.4623	1.4651	0.10.	1.4622	105	Орторомбическая
	10	1.3402	1.3428	084	1.3395	224	a=3396Å
	20	1.2019	1.2056	115	-	-	b=7.0888Å
	20	1.1891	1.1891	135	1.1896	225	c=7.7852Å
	10	1.1389	1.1313	333	1.1399	160	Z=4
	10	1.0323	1.0329	314	1.0337	412	$\rho=8.192\text{г/см}^3$
	10	0.9848	0.9840	460	0.9859	430	
	60	3.4141	3.4088	060	-	-	AgCuSe
	40	2.9058	2.9025	150	-	-	Орторомбическая
	50	2.6293	-	-	-	022	a=4.1200Å
	40	2.4948	2.4845	112	2.2272	-	b=20.4528Å
	80	2.2293	2.2294	171	2.1257	103	c=6.3010Å
	40	2.1254	-	-	-	113	Z=10
	100	2.0421	2.0453	0.10.	-	-	пр.гр. P4/nmm
	10	1.8531	-	-	1.8598	220	
	90	1.7604	1.7631	260	-	-	
	10	1.5768	1.5758	173	-	-	
	10	1.5154	-	-	1.5188	015	Ag ₂ Se
	30	1.4642	1.4652	0.10	1.4643	105	Орторомбическая
	10	1.3412	1.3411	084	1.3436	224	a=4.3609Å
	20	1.2032	1.2030	115	-	-	b=7.1260Å
	20	1.1911	1.1867	135	1.1928	225	c=7.7732Å
	10	1.1395	1.1334	333	1.1459	160	Z=4
	10	1.0331	1.0338	314	1.0385	412	пр.гр. P2 ₁ 2 ₁ 2 ₁
	10	0.9854	0.9854	460	0.9909	430	$\rho=8.101\text{г/см}^3$
	60	3.4217	3.4221	060	-	-	

	40	2.9124	2.9198	150	-	-	AgCuSe
	50	2.6338	-	-	2.6334	022	Орторомбическая
	40	2.4989	2.4942	112	-	-	a=4.1528Å
	80	2.2326	2.2398	171	2.2327	103	b=20.5325Å
	40	2.1290	-	-	2.1318	113	c=6.3119Å
	100	2.0432	2.2253	0.10	-	-	Z=10
	10	1.8830	-	-	1.8824	220	пр.гр.P4/nmm
523	90	1.7629	1.7630	260	-	-	$\rho=7.723\text{г/см}^3$
	10	1.5784	1.5809	173	-	-	
	10	1.5166	-	-	1.5169	015	Ag ₂ Se
	30	1.4656	1.4695	0.10.	1.4644	105	Орторомбическая
	10	1.3423	1.3443	084	1.3509	224	a=4.4237Å
	20	1.2040	1.2057	115	-	-	b=7.1722Å
	20	1.1930	1.1895	135	1.1528	225	c=7.7592Å
	10	1.1540	1.1403	333	1.1540	160	Z=4
	10	1.0521	1.0392	314	1.0521	412	пр.гр.P2 ₁ 2 ₁ 2 ₁
	10	10.003	0.9935	460	1.0037	430	$\rho=7.949\text{г/см}^3$
	50	2.9469	2.9479	200			
	30	2.0852	2.0845	220			ГЦК
	45	1.7775	1.7777	311			a=4.4237Å
573	100	1.7021	1.7020	222			пр.гр.Fm3m
	60	1.4740	1.4740	400			Z=4
	40	1.3525	1.3526	331			$\rho=7.251\text{г/см}^3$
	60	1.3182	1.3184	420			
	60	2.9559	2.9516	200			
	30	2.0897	2.0871	220			ГЦК
	45	1.7795	1.7799	311			a=5.9032Å
	100	1.7040	1.7041	222			пр.гр.Fm3m
	60	1.4754	1.4758	400			Z=4
	40	1.3541	1.3543	331			$\rho=7.223\text{г/см}^3$
	60	1.3196	1.3200	420			

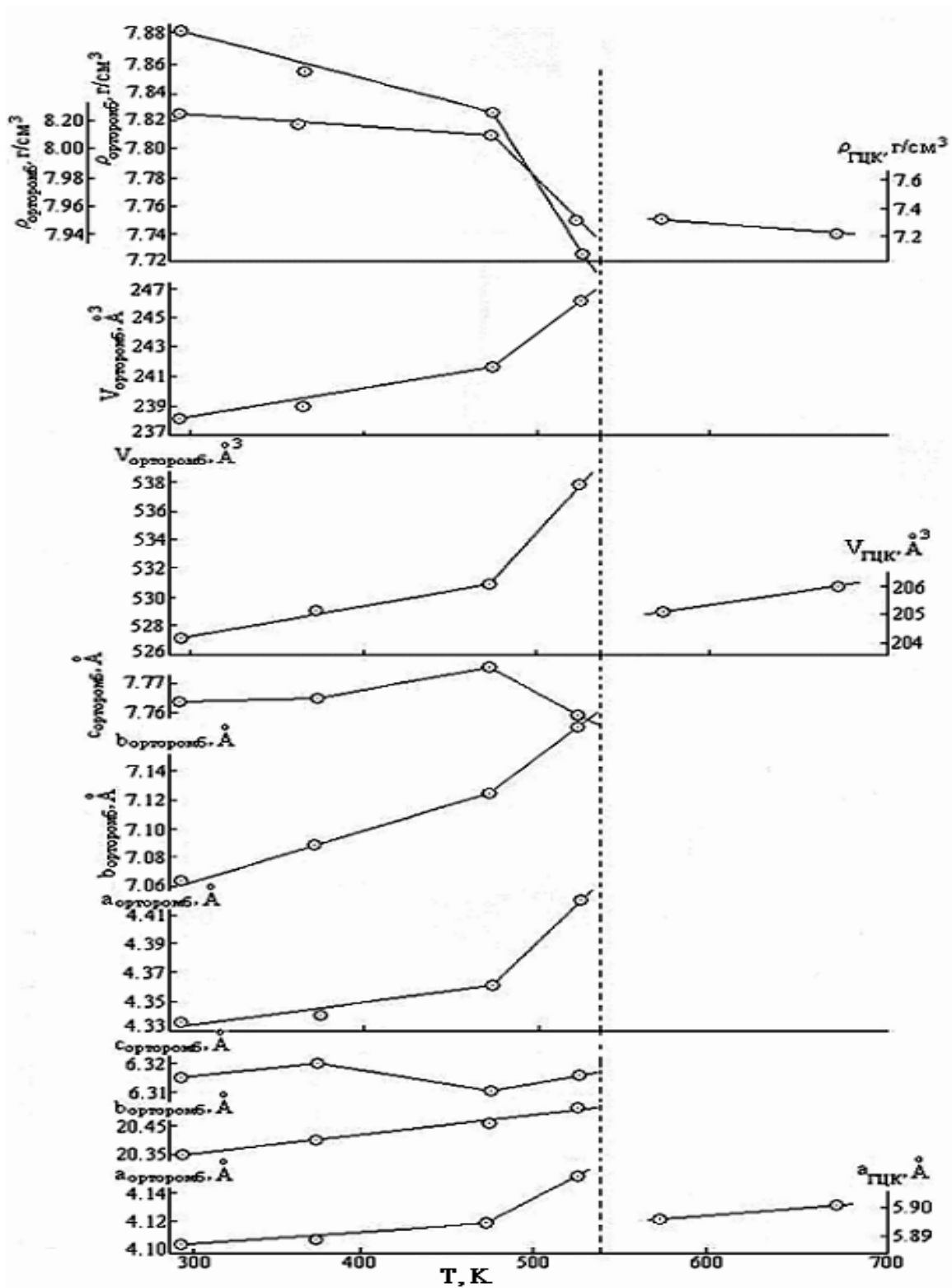


Рис.2. Температурная зависимость параметров решетки, объема и плотности орторомбической и ГЦК модификаций $\text{Ag}_{1.60}\text{Cu}_{0.40}\text{Se}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шанк Ф. Структуры двойных сплавов. М.: Металлургиздат, 1973, 315 с.
2. Структурные фазовые переходы в кристаллах при взаимодействии высокого давления (под ред. Александров К.С). Отд. Новосибирск, Наука, 1982, с.139
3. Нестехиометрические соединения. М.: Изд.Химия, 1971

4. Плюснин А.Н., Дубровина А.Н., Фипарев М.С. О стадийности полиморфного превращения ГУ-ГЦК в системе Cu_2Se и Cu_2Te // Кристаллография, 1979, т.224, №6, с.600-607
5. Горлик С.С., Власова Е.С., Дубровина А.Н., Дроздова Г.А. Влияние фазового наклета при полиморфном превращении и последующего отжига на микроструктуру халькогенидов меди // Изв. АН СССР, Неорганические материалы, 1977, т.13, №12, с.21-30-2134
6. Джафаров К.М. Структурные фазовые переходы в кристаллах $\text{Cu}_{2-x}\text{In}_{0.05}\text{S}$ ($x=0.30, 0.25, 0.20, 0.15$): Дис. канд. физ-мат. наук. Баку, 1986, с.145
7. Чжоу Ц.Л., Пинскер З.Г. Электроннографические исследования системы Ag-Se в тонких пленках // Кристаллография, 1962, 7, с.66-71
8. Современная кристаллография, М.: Наука, 1979, с.245

XÜLASƏ

Əli Babayev, Sara Yasinova

$\text{Ag}_{0.40}\text{Cu}_{1.60}\text{Se}$ -də polimorf çevrilmələrin quruluş aspektləri

$\text{Ag}_{0.40}\text{Cu}_{1.60}\text{Se}$ tərkibi sintez olunmuş və monokristallar göyərdirilmişdir. Göstərilən tərkibdəki monokristallarda yüksəktemperaturlu rentgenodifraktometrik metodla quruluş faza çevrilmələri tədqiq olunmuş və göstərilmişdir ki, $\text{Ag}_{0.40}\text{Cu}_{1.60}\text{Se}$ –də $504\pm 2\text{K}$ -də ortorombik modifikasiya SMK modifikasiyaya çevrilir.

Ortorombik və SMK- modifikasiyaların sıxlıqlarının qəfəsin hesablanmış parametrlərindən asılılığı göstərmişdir ki, tarazlıq temperaturunda ($T_0=504\pm 2\text{K}$) sıxlıq sıçrayışla $0.062\text{g}/\text{sm}^3$ qədər dəyişir. Modifikasiyanın sıxlığının xeyli dəyişməsi ortorombik modifikasiyanın monokristallarını almağa imkan verir.

ABSTRACT

Ali Babayev, Sara Yasinova

Structural aspects of polymorphic transitions in $\text{Ag}_{0.40}\text{Cu}_{1.60}\text{Se}$

Single of $\text{Ag}_{0.40}\text{Cu}_{1.60}\text{Se}$ composition have been synthesized and grown. Structural phase transitions in single crystals of the specified compositions are investigated by high-temperature X-ray diffraction method; it is shown that an orthorhombic modification in $\text{Ag}_{0.40}\text{Cu}_{1.60}\text{Se}$ transits into the fcc modification at $504\pm 2\text{K}$.

Dependence of density of orthorhombic and fcc-modifications calculated from the lattice parameters has shown that the temperature of modification equilibrium ($T_0=504\pm 2\text{K}$) changes unevenly to $0.062\text{g}/\text{sm}^3$.

Minor change in the density of modifications made it possible to obtain single crystals of low temperature orthorhombic modification.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə çapa tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

Məqaləni çapa təqdim etdi: *Fizika üzrə fəlsəfə doktoru, dosent F.Qocayev*

ƏLÖVSƏT DADAŞOV
AMEA Naxçıvan Bölməsi
E-mail: dadal_1954@mail.ru

UOT: 521.13

KOMET PARAMETRLƏRİNİN FƏZA PAYLANMASININ TƏDQIQI

Açar sözlər: uzundövrüli kometlər, komet parametrləri, paylanma

Key words: long-period comets, cometary parameters, distribution

Ключевые слова: долгопериодические кометы, кометные параметры, распределение

Müşahidə olunan kometlərin böyük əksəriyyəti günəş sisteminin uzaq oblastlarından gəlir. Planetlərin hərəkət zonasında qısamüddətli bir zaman ərzində qalaraq dinamik və fiziki mənada cüzi də olsa dəyişikliyə uğrayaraq, yenə gəldikləri yerə qayıdırlar. Məlum olduğu kimi bunlar, əsasən, uzundövrüli kometlərdir. Bu kometlər planet zonasında çox az bir zaman keçirdikləri üçün, demək olar ki, ciddi təkamülə uğramadan qalmışlar və buna görə də uzaq kainatın sirlərini özündə mühafizə edən ilkin maddə daşıyıcıları sayılmaqdadırlar.

Uzundövrüli kometlərin mənşəyi prolemi 200 ildən artıq bir zaman ərzində alimlərin tədqiqat obyektinə olsa da, bu günə qədər öz həllini tam mənada tapa bilməyib. İş təkcə bunların çox xaosluq bir struktura malik olmalarında deyil. Unutmaq lazım deyil ki, indiyədək uzundövrüli kometlərin çox cüzi bir hissəsi müşahidə olunmuşdur. Ola bilsin ki, bunların hələ müşahidə olunmamış çox nəhəng bir hissəsi tamamilə başqa xüsusiyyətlərə malikdir. Bundan başqa, onların əksəriyyətinin böyük yarımxlarının qiyməti ya ümumiyyətlə heç məlum deyil ($e=1$), ya da dəqiqliyi çox aşağıdır. Bu, əsasən, XIX əsrə qədər müşahidə olunmuş kometlərə aiddir. Problemi mürəkkəbləşdirən səbəblərdən biri də budur ki, insanlıq tarixində yalnız bir dəfə müşahidə olunan bu kometlərin orbit elementlərini və kosmoqoniyada çox mühüm olan fiziki parametrlərini kifayət qədər dəqiqləşdirmək mümkün deyil.

Aparığımız araşdırmalar göstərir ki, uzundövrüli kometlərin ən xarakterik xüsusiyyətlərindən biri L (ekliptik uzunluq) parametrinin qiymətlərinin qeyri-bərabər paylanmasıdır, belə ki, $L=90^\circ$ və $L=270^\circ$ qiymətlərinin yaxın ətrafında L_i parametrlərinin hiss ediləcək dərəcədə sıxlaşması müşahidə olunmaqdadır (uyğun olaraq 300 və 450 ədəd). İkinci maksimum Radziyevski və Tomanovun [1] işlərində geniş tədqiq olunmuşdur. Onlar göstərmişlər ki, bu maksimum kometlərin «ulduzlararası mənşəyi» hipotezi ilə əlaqədardır. Lakin, belə halda birinci maksimumun səbəbi qeyri-müəyyən olaraq qalır.

Uzundövrüli kometlərin əksəriyyəti üçün tərs hərəkət xarakterikdir. Marsdenin kataloquna görə bu kometlərin 54% -dən çoxu üçün $i > 90^\circ$.

B (ekliptik enlik) parametrinin paylanmasında da müəyyən sıxlaşma hiss edilir. Düyün nöqtələrinin paylanmasında 86° və 266° uzunluqlar ətrafında maksimumlar mövcuddur.

Aparığımız araşdırmalar göstərir ki, bəzi müəlliflərin [2] hesab etdiyinə əksinə olaraq, Qalaktika müstəvisi ətrafında komet perihelilərinin sayı nəzərə çarpan maksimuma malik deyil. Komet perihelilərinin konsentrasiyası ekliptikaya perpendikulyar müstəvi ətrafında daha yüksəkdir.

$1/a$ (a -orbitin böyük yarımxudur) parametrinin paylanması, bunların kiçik qiymətləri oblasında kəskin maksimumla müşayiət olunur. Bir çox müəlliflər hesab edir ki, perihelilərin paylanması Günəş apeksi ($L=270^\circ$, $B=53.5^\circ$) yaxınlığında yüksək sıxlığa malikdir [1]. Qeyd etməliyik ki, apardığımız tədqiqatlar bu faktı da inkar edir.

Bəzi komet orbitlərinin böyük planet orbitlərindən minimal məsafəsi, onların təsir sferası radiusundan kiçikdir [3]. Uzundövrüli kometlərin əksəriyyəti üçün $q < 1$ a.v. ($n=621$). q və $1/a$ parametrləri arasında tərs mütənəsbliyə bənzər bir statistik asılılıq var; - periheli məsafələri artdıqca $1/a$ -nın qiymətləri azalır. Bu asılılıq uzundövrüli kometlərin ilkin orbitlərini tədqiq edərkən aşkar olunmuşdur [4]. Bu kometlər yüksək parlaqlıqları ilə seçilir.

Bəzi orbit elementləri (məsələn Ω və i) arasında statistik əlaqə tapılmış [5], lakin kifayət

qədər əsaslandırılmamışdır. Uzundövrü kometlər sistemində bəzi effektlər nəzərə çarpır ki, Radziyevskinin fikrincə bunlar presessiyanın nəticələridir. Bu kometlər arasında orbital parametrləri ilə biri-birinə çox yaxın olan obyektlər vardır. Bu baxımdan «Kreyts ailəsi» kometlərini xüsusi qeyd etmək lazımdır. Uzundövrü kometlər üçün, Tisseran sabitinin qiymətləri istənilən sistemdə geniş diapazona malikdir və heç bir qanunauyğunluq aşkar edilmir.

Fikrimizcə, yuxarıda göstərilən bütün bu qanunauyğunluqların hamısı mübahisəsiz deyil və bəziləri kosmoqonik şərhə malik olmaya bilər. Bunlardan bəzilərinin seleksiya effektinin nəticəsi olması mümkündür. Bundan başqa, bu və ya digər xüsusiyyətin, dinamik proseslərin nəticəsi olub-olmadığını aydınlaşdırmaq lazımdır. Uzundövrü komet sisteminin çox nizamsız olması onun mənşəyi məsələsini xeyli mürəkkəbləşdirir. Buna görə də bu sistemi daha çox və daha dərinləndirən analiz etməklə, əldə olunan nəticələri kənar effektlərin təsirindən təmizləmək lazımdır. Bütün bunlardan sonra müəyyən bir konsepsiya yaratmaq və ya artıq mövcud olan hipotezlərin doğruluğunu yoxlamaq olar.

ƏDƏBİYYAT

1. Радзиевский В. В., Томанов В. П. К вопросу о происхождении почти параболических комет // *Астрономический журнал*, 1970, №47, с. 1094–1099
2. Радзиевский В. В. Новые закономерности в распределении элементов орбит // *Письма в Астрономический журнал*, 1980, том 6, №5, с. 309-313
3. Коноплева В. П. О существовании семейств Юпитера и Сатурна среди непериодических комет // *Кометный циркуляр КГУ*, 1980, №252, с. 2–3
4. Marsden B. G., Sekanina Z. And Everhart E. New osculating orbits for 110 comets and analysis of original orbits for 200 comets // *Astronomical Journal*, 1978, №83, p.64–71
5. Томанов В. П., Радзиевский В. В. О распределении узлов и полюсов орбит долгопериодических комет // *Астрономический вестник*, 1975, т 9, №1, с. 35–39.

ABSTRACT

Alovsat Dadashov

Investigation of the spatial distribution of parameters comet

Comets - small bodies of the solar system, the study of which lately is of great interest. Scientists believe that comets were formed at about the same time as the solar system. Understanding the composition and characteristics of comets will get answers to questions related to the formation of our planet and other planets of the solar system. Therefore, the study of comets, especially long-period that formed about 4.6 billion. Years ago, may lead to a number of new discoveries.

We study the long-period comet systems in the parameters L , B , $1/a$, \dot{I} , W , q . The work covers the whole set of long-period comets to 2014. It is shown that the distribution parameter L and B have values near the local maxima and, respectively. Between the parameters $1/a$ and q showed inverse proportion.

РЕЗЮМЕ

Аловсат Дадашов

Исследование пространственных распределений параметров комет

Кометы - малые тела Солнечной системы, исследования которых в последнее время представляет очень большой интерес. Ученые считают, что кометы образовались приблизительно в одно время с Солнечной системой. Понимание состава и особенностей комет поможет получить ответы на вопросы, связанные с формированием нашей планеты и других планет Солнечной системы. Поэтому исследование комет, особенно долгопериодических, которые образовались около 4,6 млрд. лет назад, может привести к ряду новых открытий.

В работе исследуется долгопериодический кометный систем по параметрам L , B , $1/a$, \dot{I} , Ω , q . Работа охватывает всю совокупность долгопериодических комет до 2014 год. Показано, что распределение параметров L и B имеют локальные максимумы около значений 90° и 270° , соответственно. Между параметрами $1/a$ и q выявлено обратно-пропорциональная зависимость.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə çapa tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

RUSLAN MƏMMƏDOV

AMEA Naxçıvan Bölməsi

E-mail: ruslan1213@box.az

UOT 539.12

GÜNƏŞ ALIŞMALARI HAQQINDA

*Açar sözlər: Günəş, alışma, xromosfer, maqnit sahəsi, spektral xətt**Keywords: Solar, flash, chromosphere, the magnetic field, the spectral line**Ключевые слова: Солнце, вспышка, хромосфера, магнитное поле, спектральная линия*

Xətti ölçüləri ləkələrin ölçüsü tərtibdə və fəallığına görə ləkələrlə sinxron olan Günəş alışımları adlanan törəmələr Günəş fəallığının ən güclü, ən parlaq təzahürüdür. Günəş alışımları Günəşin atmosferində baş verən partlayış xarakterli qeyri-stasionar prosesdir. Ən güclü Günəş alışıması zamanı çox qısa vaxt ərzində (10^{-2} - 10^{-3} san.) ayrılan enerji 10^{28} - 10^{32} *erq* olur (müqayisə üçün qeyd edək ki, Yerdə ən güclü zəlzələ zamanı ayrılan enerji 10^{24} *erq*-dir). Bu enerji yerdəki bütün yanacaq ehtiyatlarının (neft, daş kömür və s.) yanmasından alınan istilik enerjisindən yüz dəfələrlə çoxdur. Onu da qeyd edək ki, belə güclü alışımlar təxminən ildə bir dəfə baş verir [1].

Şübhəsiz ki, Günəşdə müxtəlif enerjili alışımlar baş verir. Ancaq çox zəif alışımları müasir cihazlarla qeyd etmək olmur. İndi müşahidə oluna bilən alışımların enerjisi 10^{24} *erq*-dir. Onların enerjisi ən güclü alışımların enerjisindən 10^9 dəfə kiçik olduğundan nano alışımlar adlanırlar. Şübhəsiz ki, enerjisi nanoalışımların enerjisindən kiçik olan alışımlar çoxdur. Alışımlar incə quruluşa malik olub sıx və isti liflərdən ibarətdir. Alışımların enerjiyə görə paylanması və onların baş vermə tezliyi eksponensial qanuna tabe olur.

Enerjisi $\sim 10^{29}$ *erq* olan alışımanın verdiyi enerji seli Günəş sabitindən ($\sim 4 \cdot 10^{33}$ *erq/s*) təxminən $2,5 \cdot 10^3$ dəfə azdır. Ona görə alışıma Günəşin işıqlılığına nəzərə çarpacaq dərəcədə təsir etmir.

Bəzi alışımlar, xüsusilə də 3-4 ballıq alışımlar kosmik şüalar mənbəyi olurlar. Bu alışımlar zamanı protonlar, α zərrəciklər və digər yüklü hissəciklər atılır. Bu hissəciklərin enerjisi 10^7 - 10^9 eV olur. Belə alışımlar proton alışımları adlanır.

Əvvəllər güman edilirdi ki, alışımlar xromosferdə baş verir. Ona görə də onlar xromosfer alışımları adlanırdı. Lakin Günəş atmosferinin müxtəlif qatlarının işıqlanma ardıcılığına görə müəyyən olunmuşdur ki, alışımların enerjisi alışıma baş verənə qədər Günəş tacının müəyyən qatında yığılır və alışıma zamanı yuxarı (tacın üst qatlarına doğru) və aşağı (xromosferə doğru) yayılır. Alışıma zamanı Günəş atmosferinin aşağı qatlarında parlaqlığın artdığı sahə Günəş səthinin görünən yarısının 0,001- ni əhatə edir.

Güclü alışımların yaşama müddəti (alışmanın ən parlaq fazası) dəqiqələrlə ölçülür. Alışıma zəif olduqda onun yaşama müddəti azalır. Alışıma zamanı radiodiapozonda Günəşin şüalanması milyon dəfələrlə güclənir [2].

Günəş alışımları maqnit sahəsi 2000-3000 *Qs* olan ləkələr ətrafında meydana gəlirlər. Deməli onlar Günəş səthindəki güclü maqnit sahələri ilə əlaqədardırlar.

Günəş alışımlarının şüalanması kilometrlik radiodalğalardan tutmuş qamma şüalarına qədər olan bütün elektromaqnit şüalanması spektrini əhatə edir. Lakin şüalanma enerjisinin əsas hissəsi görünən oblasta düşür. Ultrabənövşəyi və rentgen oblastına düşən şüalanma enerjisi görünən oblastdakı enerjiden 10-100 dəfə az olur. Radiooblastda isə şüalanan enerji çox az olur.

Alışımların optik spektrində ən intensiv xətlər hidrogen xətləri, *HeI* və *HeII* xətləri, *CaII*-nin H və K xətləri və digər ionlaşmış və neytral atomların emissiya xətləridir. Metalların emissiya xətləri alışmanın mərkəzi hissəsində meydana gəlirlər. Hidrogenin şüalanma zonası isə genişdir. Bu zona alışmanın spektr xətlərinin “metal” nüvəsini hər tərəfdən əhatə edir. Kimyəvi

elementlərin alışma spektrində belə paylanması nəticəsində onların emissiya xətləri eyni vaxtda meydana gəlir. Əvvəlcə hidrogen, helium və metalların güclü xətləri, sonra isə metalların zəif xətləri və nadir torpaq elementlərinin spektral xətləri meydana gəlirlər [3].

Günəş alışmalarının spektrində hidrogen və helium xətləri çox geniş qanadlı profillərə malikdirlər. Məsələn, H_{α} xəttinin eni 20\AA -ə çatır və bu alışmalarda plazmanın yüzlərlə km/san sürətlə hərəkəti ilə izah olunur. Alışmaların spektrinin ətraflı təhlili göstərir ki, onlar yüksək dərəcədə qeyri-bircins törəmələrdir. Onlarda müxtəlif kimyəvi elementlərin həyəcanlaşması və ionlaşması mexanizmi eyni deyil.

Yer atmosferindən kənarında edilən müşahidələr göstərir ki, Günəş alışmaları zamanı spektrin ultrabənövşəyi bölgəsindəki $L_{\alpha}(\lambda 1216\text{\AA})$ xətti, $\text{HeII}(\lambda 304\text{\AA})$ xətti, $\text{FeXV}(\lambda 284\text{\AA})$ və $\text{FeXVI}(\lambda 335\text{\AA})$ xətləri 50%-ə qədər güclənir. Spektrin $\lambda \approx 1-20\text{\AA}$ rentgen oblastında tam şüalanma alışma olmayan vaxtdakından 2-3 tərtib böyük olur. Bundan başqa bəzi alışmalar zamanı enerjisi 20-500 keV olan rentgen şüaları və γ şüalar şüalanır. Bəzi alışmaların spektrində HCaII və Balmer xətlərinin bənövşəyi qanadında depressiya müşahidə olunur. Bu alışma bölgələrində sürəti 80 km/san –yə çatan qaz axınlarının olması ilə izah olunur.

Günəş alışmaları gücünə və əhatə etdiyi sahəyə görə bir neçə sinfə ayrılır. Aşağıdakı cədvəldə bu sinflər göstərilmişdir.

Cədvəl 1.

Alışmaların təsnifatı

Alışmanın tutduğu sahə	100	100-250	250-600	600-1200	>1200
Sınıf	S	1	2	3	4

Cədvəldə alışmaların tutduğu sahə Günəşin görünən yarımsferinin səthinin milyonda bir hissələri ilə verilmişdir. Sinflərin hər biri parlaqlığına görə bir neçə alt sinfə ayrılır.

Günəş alışmaları H_{α} xəttində parlaqlığın dəyişməsinə görə iki tipə ayrılır: 1. A-tip alışmalar – impulsu inkişaf edən alışmalar. 2. C-tip alışmalar – tormozlanmış inkişafı alışmalar.

A-tip alışmalar ani baş verir və parlaqlığı tez azalır, yəni bu tip alışmalar partlayış xarakterlidir. C-tip alışmaların parlaqlığı bir qədər yavaş artır və bir qədər ləngiməklə azalır. Adətən A-tip alışmalar tək bir özəyə malik olur. Onlarda sürəti 200-300 km/s olan plazma atılır. C-tip alışmalarda isə bir neçə sərbəst özək olur və onlar eyni vaxtda alışmırlar. Onlarda sürəti 40-60 km/s olan plazma axını müşahidə olunur. A-tip alışmalar Günəş ləkələri qrupunun yüksəliş dövründə, C-tip alışmalar isə ləkə qruplarının dağılma dövründə meydana gəlirlər. Müşahidələrin təhlili əsasında demək olar ki, impulsiv xarakterli A-tip alışmalar xromosferdə, ləng inkişafı C-tip alışmalar isə Günəş tacında lokallaşmışdır [5].

Son zamanlar alışmaların Rentgen şüalanmasına görə təsnifatı aparılmışdır. Hazırda ən çox bu təsnifatdan istifadə olunur. Bu təsnifat alışmaların 1-8 \AA oblastında şüalanma gücünə görə aparılmışdır. Alışmalar bu oblastda şüalanma gücünə görə 5 sinfə ayrılır. Bu sinflər aşağıda cədvəl 2-də göstərilmişdir. Cədvəldən görüldüyü kimi ən güclü alışma X sinif alışma, ən zəif alışma isə A sinif alışmadır.

Cədvəl 2.

Sınıf	Şüalanmanın gücü (sıçrayışın intensivliyi, Vt/m^2)
A	$I \ll 10^{-6}$
B	$I < 10^{-6}$
C	$10^{-6} < I < 10^{-5}$
M	$10^{-5} < I < 10^{-4}$
X	$I < 10^{-4}$

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi Günəş alışmaları zamanı çox böyük enerji ($>10^{32}$ erq) ayrılır. Bəs bu enerji necə yaranır, onun şüalanma mexanizmləri nədir, alışmaların planetlərarası fəzada, o cümlədən Yerdə yaratdığı fəsadların mexanizmi tam aydındır? Bu barədə bir çox fərziyyələr verilmişdir. Bu üç əsas suala hələlik tam və birqiyətli cavab tapılmamışdır və demək olar ki, bu problem hələ tam həllini tapmayıb. Lakin hər üç problem üzrə çoxlu və maraqlı nəticələr alınmışdır. Alışmalar güclərinə, xarici görünüşlərinə, zamandan asılılıqlarına və müxtəlif şüalanmalarda nisbi roluna görə bir-birlərindən o qədər fərqlənir ki, onların “standart şəklini” təsvir etmək sadəcə olaraq mümkün deyildir. Bu səbəbdən də alışmanın hələ birqiyətli tam real nəzəriyyəsi yoxdur. Lakin bir məsələ tamamilə aydındır – alışmalarda maqnit sahələrinin təsiri vardır. Buraya onu da əlavə edək ki, alışmalar adətən güclü və xüsusilə mürəkkəb quruluşlu maqnit sahəsinə malik ləkə qrupunun üzərində – əksütblü sahələr arasında əmələ gəlir. Son fikirlərə görə maqnit qüvvə xətlərinin kələflənməsi nəticəsində maqnit sahəsinin dinamik dissipasiyası baş verir, plazma kəskin sıxılır, temperatur on milyon dərəcəyə çatır, maqnit sahəsinin enerjisi plazma hissəciklərinin kinetik enerjisinə çevrilir. Belə yüksək sıxlıq və yüksək temperatur şəraitində nisbətən kiçik həcmdə istilik nüvə reaksiyaları gedir. Doğrudan da alışmalarda 2H (deyterium) və 3H (tritium) izotoplarının sayı adi fotosferdəkinə nisbətən xeyli artır. Bu da onu göstərir ki, alışma zamanı istilik- nüvə reaksiyaları baş verə bilər [1].

Alışma olmayan halda əks istiqamətdə axan maqnit selləri plazma qatlarının qarşılıqlı təsirini ekranlayır. Alışma zamanı anormal yüksək temperaturlu plazma qatının keçiriciliyi kiçik olduğundan əks istiqamətlərdə yönələn maqnit qüvvə xətləri plazma qatına daxil olur və onların birləşməsi baş verir. Bu zaman maqnit sahəsinin enerjisi plazma hissəciklərinin kinetik enerjisinə çevrilir.

1917-ci ildə Ellerman Maynt Vilson rəsədxanasında hidrogenin Balmer seriyası xətlərinin qanadlarında intensivliyin qısa müddətli alışma xarakterli artmasını müşahidə etmişdir. O göstərmişdir ki, H_α xəttinin qanadlarında ensiz emissiya zolağı müşahidə olunur. Maraqlıdır ki, bu emissiya xəttin mərkəzində yox, qanadlarında müşahidə olunur. Ellerman bu emissiya zolaqlarını “bomba” adlandırmışdır. Həm də xəttin bənövşəyi qanadında emissiya zolağı qırmızı qanadında olduğundan uzundur. Sonralar Ellerman “bombaları” A.B. Severni tərəfindən ətraflı öyrənilmişdir. O, xromosfer alışmalarını yüksək dispersiya və yüksək ayırd etmə qüvvəsinə malik olan cihazlarla müşahidə etmişdir. Severninin müşahidələrindən aydın olur ki, Günəşdə Ellerman bombalarına oxşar kiçik yarımları tez-tez görmək olur. Onlar alışma prosesinin ilk mərhələsində artan ləkələrin yanında görmək olar. A.B. Severni, göstərmişdir ki, Ellerman bombaları $CaII$ -in H və K xətlərinin profillərində daha kəskin görünür. Bəzən bu bombalar emissiyada yox, udulmada müşahidə olunur.

Alışmalar spektral xətlərin mərkəzində və qanadlarında müşahidə olunur, “bombalar” isə spektral xəttin qanadlarında daha yaxşı müşahidə olunur. Bu o deməkdir ki, “bombalar” fotosfer və xromosferdə şüalanır. “Bombalar” həmişə kəsilməz spektr ilə müşayiət olunur. Bu “bombaların” meydana gəlməsi Günəşin fotosferində və aşağı xromosferdə baş verən müxtəlif sürətli alışma tipli qaz axınları ilə əlaqədardır [4].

Alışma olmayan halda plazma əks istiqamətdə axan maqnit sellərinin qarşılıqlı təsirini ekranlayır. Alışma zamanı anormal yüksək temperaturlu plazma qatının keçiriciliyi anormal kiçik olduğundan əks istiqamətlərdə yönələn maqnit qüvvə xətləri plazma qatına daxil olur və onların birləşməsi baş verir. Bu zaman maqnit sahəsinin enerjisi plazma hissəciklərinin kinetik enerjisinə çevrilir. Günəşdə alışmalar yerüstü, peyk və planetlərarası stansiyalardan kilometrlik radio-dalğalardan tutmuş sərt qamma şüalanmaya qədər bütün diapazonda müşahidə olunur.

Günəş alışmaları tədqiqinin praktiki əhəmiyyəti var. Çünki alışmalar ionosferə təsir edir, radio rabitəni, naviqasiyanın, elektron cihazların işini pozur. Alışmaların yerətrafi kosmik fəzaya da təsiri böyükdür. Ehtimal var ki, alışmaların Yerin biosferinə də təsiri var. Bu səbəbə görə Günəş alışmalarının proqnozlaşdırılması mühüm məsələyə çevrilir. Günəş fizikasında artıq Günəş ləkələrinin S adlanan əlamətləri məlumdur. Günəşin elə zonaları var ki, orada maqnit sahəsi eşilərək S hərfini xatırladırlar. Çox ehtimallıdır ki, bu zonalar tac atılmalarının mənbəyi ola bilər. Marşal Mərkəzi Günəş rəsədxanasında qurulmuş vektorlu maqnitografı Günəşin səthinin aktiv sahələri

tədqiq olunur və bu sahələrdə toplanmış maqnit enerjisinin miqdarı təyin olunur. Orbital peyklərdə qurulmuş teleskoplardan müşahidələr alışımların 12 saat əvvəl proqnozlaşdırmağa imkan verir [6].

ƏDƏBİYYAT

1. Hüseynov R. Ə. *Astronomiya*. Bakı, Maarif, 1997, 468 s.
2. Hüseynov R. Ə. *Ümumi astrofizika*. Bakı, Bakı Univerisiteti, 2010, 368 s.
3. Quluzadə S. M. *Günəş fizikası*. Bakı, Elm və təhsil, 2012, 232 s.
4. К.де Ягер. *Строение и динамика атмосферы Солнца*, Москва, 1962, с. 372
5. Бакулин П. И., Кононович Э. В., Мороз В. И. *Курс общей астрономии*, 5-издание. Москва, Наука, 1983, с. 560
6. Новый орбитальный телескоп для исследования солнечных вспышек.
<http://news.cosmoport.com/2003/02/04/9.htm>

ABSTRACT

Ruslan Mammadov

About solar flares

One of the major forms of solar activity effect are solar flares. Solar flares are observed in the form of a sudden increase in luminosity of solar chromosphere, and in the most powerful cases also in the photosphere. All phenomenon lasts from several minutes to several tens minutes and is accompanied by energy release up to 10^{28} - 10^{32} erg. Released energy is ejected to space in the form of the cosmic-ray flux and electromagnetic radiation of all ranges-from X-ray and gamma rays to meter radio-waves. Cosmic rays cause the strong geomagnetic disturbances on the Earth, have essential influence on all strata of the terrestrial atmosphere. This energy is hundreds of times greater than the energy received from all of flue energy reserves in the ground together. The causes of solar flares are labile configurations of powerful magnetic fields existing in centers of activity.

РЕЗЮМЕ

Руслан Мамедов

О солнечных вспышках

Одна из важнейших форм проявления солнечной активности, являются солнечные вспышки. Солнечные вспышки наблюдаются в виде внезапного увеличения яркости солнечной хромосферы, а во время наиболее мощных событий и фотосферы. Все явление длится от нескольких минут до нескольких десятков минут и сопровождается выделением энергии до 10^{28} - 10^{32} эрг в виде энергичного выброса массы и потока космических лучей, электромагнитного излучения всех диапазонов от рентгеновского и гамма-излучения до метровых радиоволн. Эта энергия сотни раз больше, чем энергии, полученные от сгорание всех запасов энергоносителей в земле вместо взятых. Вспышки вызывают на Земле сильные геомагнитные возмущения, оказывают существенное воздействия на все слои земной атмосферы.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə çapa tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

Məqaləni çapa təqdim etdi: *Fizika üzrə fəlsəfə doktoru, dosent F.Qocayev*

TEXNİKİ ELMLƏR

ASƏF ƏLİYEV

Naxçıvan Dövlət Universiteti

aliyev-asef@mail.ru

UOT 656: 001.83(100)

AVTOMOBİLİN İNFORMASİYALILIĞINI YÜKSƏLDƏN MÜASİR SİSTEMLƏR

Açar sözlər: *aktiv təhlükəsizlik, müasir sistemlər, avtomobilin informasiyalılığı təhlükəli yaxınlaşma*

Key words: *active security, modern systems, vehicle information, a dangerous approach*

Ключевые слова: *активная безопасность, современные системы, информированности автомобиля, опасный подход*

Sürücünün fəaliyyəti onun kənar amillərin təsirindən alınan (görmə və eşitmə ilə) məlumatların qəbul edilməsi və təhlili ilə bilavasitə bağlıdır.

Sürücü aldığı və təhlil etdiyi məlumatlara əsasən konkret qərar qəbul edərək avtomobili idarə edir. Ancaq bəzi hallarda o, ona lazım olan məlumatı vaxtında təhlil edə bilmir, onu buraxır və ya həddindən gec qərara gəlir və nəticədə yol nəqliyyat hadisəsi baş verir. Sürücünün nəzərində mürəkkəb yol nəqliyyat vəziyyətinin tələbatlarına uyğun kifayət qədər məlumatların olmaması da yol nəqliyyat hadisəsinə səbəb olur. Beləliklə, hərəkətin təhlükəsizliyi çox hallarda sürücünün qəbul etdiyi məlumatların keyfiyyətindən və sayından asılıdır [1, s.73].

Avtomobillər arasında məlumat mübadiləsinin aktiv təhlükəsizlikdə rolu çox böyükdür. Belə məlumat mübadiləsinə misal kimi dünyanın 30 ölkəsinin müxtəlif şirkətlərinin o cümlədən, *BMW, Volkswagen, Daimler, Renault, Audi, Opel* şirkətlərinin testləşdirdiyi *Car-2-Car* (Avtomobil-avtomobilə) sistemində istifadə olunan siqnalı göstərmək olar.

Belə quruluşlarla təchiz edilmiş avtomobillər öz aralarında eyni diapazonda işləyən **WLAN rabitəsi** vasitəsilə əlaqələnilir. Əlverişsiz vəziyyətlərlə və pis hava şəraiti ilə üzləşmiş avtomobillər bir-biri ilə 100 metrə radiusda rabitə qura bilirlər. Məsələn, gecə trassasında hərəkət edən avtomobilin sürücüsü «kor» döngədə digər avtomobilin olması haqqında qabaqcadan məlumatlandırıla bilər və ondan diqqətli olmaq tələb olunur.

Qeyd olunan sistem universal olub, müxtəlif sinif avtomobillərdə və həmçinin motosiklətlərdə tətbiq oluna bilər. O, mikroprosessorlardan, radioötürücüdən və naqilsiz moduldan (məlumatları displeyə çıxaran səs siqnalı və ya sürücünün oturacağına titrəməsi ilə müşahidə olunan) ibarətdir.

Sistemin müəllifləri əmindirlər ki, avtomobilləri geniş surətdə *Car-2-Car* sistemi ilə təmin etməklə, yol nəqliyyat hadisələrinin sayını kifayət qədər azaltmaq olar və bu sistemi yeni avtomobillərin standart avadanlıqları sırasına daxil etmək olar.

Qeyd edək ki, buna oxşar sistemin yaradılması ilə *Ford* firması da məşğuldur. Onlar sistemi *Smart Intersection* (ağıllı yol ayırıcı) adlanır və avtomobilin lokasiyasını təmin etmək üçün naqilsiz rabitədən **GPS sistemindən** istifadə olunur. Avtomobil yol ayırıcına yaxınlaşdıqda svetofor dirəyində xüsusi qoruyucu sistemdə yerləşdirilmiş kompyuter avtomatik olaraq avtomobildə yerləşdirilmiş eyni cihazla əlaqələnir. Bundan sonra saniyənin hissələri ərzində məlumat mübadiləsi

aparılaraq, sürət, yol ayrıcının sərhəddinə qədər olan məsafə təhlil edilərək, yaxınlaşarlardan hansına keçid icazəsi verilməsi məsələsi dəqiqləşdirilir. Bundan sonra sistem qərar qəbul edərək, sürücüyə ya yol ayrıcına girişə qədər dayanma ya da yol ayrıcını keçməyə icazə vermə haqqında «xəbər» verir. Sinyal avtomobilə yanib-sönən qırmızı işıq diodu və danışıq səsi ilə verilir.

Dünyanın müxtəlif məşhur avtomobil istehsalçılarının müxtəlif cür avadanlıqları və bəzən funksiyalarında müəyyən fərqlilikləri olan kruiz-nəzarət sistemləri qabaqdakı avtomobilə qədər olan ara məsafəsi haqqında sürücünü məlumatlandırır və özü avtomatik olaraq bu məsafəni tənzimləyir. Belə sistemlərdən biri də *BMW* firması tərəfindən işlənilib hazırlanmış «*Stop & Go*» funksiyalı **kruiz-nəzarət sistemidir**. Bu sistem böyük komfort, daha çox dinamika və daha yüksək təhlükəsizliyi təmin edir. Bu, özünü daha çox yüksək intensivlik, tıxac, müxtəlif yol vəziyyətlərinin mürəkkəbləşməsi şəraitində göstərir. O, sürücünü məlumatlarla təmin edir, qərarların qəbulunu asanlaşdırır, əlverişsiz və mürəkkəb vəziyyətlərdə qərarların qəbulunda sürücüyə kömək edərək, mürəkkəb vəziyyətlərdə avtomobilin daha da inamla idarə edilməsini təmin etməklə, hərəkətin təhlükəsizliyini yüksəldir.

«*Stop & Go*» funksiyalı kruiz-nəzarət sistemi radar qurğuları vasitəsilə kiçik sürətli avtomobil cərgəsində dəfələrlə yerindən tərpənmə və tormozlamalar zamanı sürücüyə kömək edir və qabaqda gedən avtomobilə qədər olan lazımi məsafəni tənzimləyir. Vericilər 150 m və daha kiçik təsir sahəsinə malik olub, qabaqda 20 m məsafədə hərəkət edən digər hərəkət iştirakçılarını «tanırırlar». Onların xarici görünüşü avtomobilin dizaynına uyğun olub, onun qabaq hissəsində nəzərə çarpmadan yerləşdirilir. Sistem 0-180 *km/saat* sürətinə hesablanmışdır. O, sıx hərəkət şəraitində ara məsafəsindən asılı olaraq, avtomobili avtomatik olaraq sürətləndirir və yavaşdır.

Avtomobilin informasiyalılığının yüksəldilməsində *Volvo* şirkətinin işləyib hazırladığı **BLIS sisteminin** böyük əhəmiyyəti vardır. Bu sistem 2005-ci ildən istifadə olunmağa başlamışdır. O, avtomobilin arxasında sağ və sol tərəflərdə təhlükəli zonada nəqliyyat vasitələrin olması haqqında sürücünü məlumatlandırır.

Sistem avtomobilin xarici arxa görünüş güzgüsündə yerləşdirilmiş saniyədə 25 kadr çəka bilən videokameradan və eni 3 m, uzunluğu 9,5 m olan bu zonada obyektlərin yerləşməsinə aşkarlayır. Təhlükəli yaxınlaşmada sistem salondan arxa sağ və sol görünüş güzgülərinin yanında sarı işıq diodu yandırır.

Bu sistem kompleksi ötməyə çıxan, həmçinin, zolaqlar üzrə yerdəyişmələr zamanı məsuliyyət zonasına düşən kiçik sürətlə hərəkət edən avtomobillərə reaksiya verir.

Yollarda qəzaların baş verməsi ehtimalının azaldılmasında *Mobil Eye* şirkətinin işləyib hazırladığı **Eye Q elektronika sisteminin** böyük rolu vardır. Sistem təhlükəli yaxınlaşmada avtomobili tormozlayır və yolun ox xəttinin kəsilməsinə nəzarət edir. O, avtomobilə bərkidilmiş videokameraların çəkdiyi təsvirləri analiz edir. Nəticədə qabaqdan yolu qaçan piyadanı, yük avtomobili bortunun təhlükəli yaxınlaşmasını, yollardakı nişanlama xətlərini, çirk və su gölməçələrində «gizlənmiş» elementləri müxtəlif işıqlandırma və sel yağışları şəraitində «görmək» və təhlil etmək mümkün olur.

Smar Tire sistemi də kifayət qədər maraqlı olub, avtomobilin informasiyalılığının yüksəldilməsində böyük rol oynayır. Bu sistem avtomobilin hərəkətdə olduğu vaxt şinlərdə havanın təzyiqi və temperaturuna nəzarət etməklə, nasazlığın hansı təkərdə baş verdiyini aşkarlayır. Sistem minik avtomobili, Cip və kiçik yükçükləmə qabiliyyətli yük avtomobillərində problemsiz olaraq tətbiq edilir. O, təkər diskinin daxili tərəfinə bərkidilmiş sensor vericidən və baza radarından ibarətdir.

Sensor vericilər şinlərdə havanın təzyiq və temperaturuna nəzarət edərək, məlumatları avtomobilin salonunda yerləşdirilmiş radara ötürür.

Smairt Mirror-«ağıllı» arxa görünüş güzgüsü *Azentek* kompaniyası tərəfindən işlənilib hazırlanmış və bazara buraxılmışdır. O, *GPS* naviqator funksiyasını yerinə yetirir və *Bluetooth qurğusu* telefona danışmaq və arxa görünüş kamerasının monitoruna məlumat ötürməyə xidmət edir.

Quraşdırılmış *GPS* qurğusunda *Samsung Sırf III* çipindən istifadə edilir və məlumatlar arxa görünüş güzgüsünün sağ tərəfindəki dörd düyməlik sensor monitora çıxarılır.

Qabaq şüşə təmizləyiciləri güclü yağışda optimal görünməni təmin etmək üçün dəyişən tezlikli işə düşmə funksiyası ilə təmin edilmişdir. Şüşətemizləyicilər yağış vericilərinin köməyi ilə avtomatik şəkildə də işə düşə bilər.

V xətlə *Volvo* modelləri həm arxa, həm də qabaq şüşə yuyucuları və təmizləyiciləri ilə təchiz olunmuşdur. Arxa şüşətemizləyicisi qabaq şüşətemizləyicisinin işlədiyi halda arxaya hərəkət zamanı avtomatik olaraq işə düşür. Qabaq külək şüşəsi yuyucusu püskürmə funksiyalı və iki püskürücü forsunka ilə təchiz edilmişdir. Bundan başqa bu avtomobillər fara yuyucularına da malikdirlər.

Avtomobilin xarici müşahidəliliyində ixtiyari hava şəraitində arxadakı avtomobildən onun tormozlanmasının yaxşı görünməsinin də əhəmiyyəti vardır. Bütün *Volvo* avtomobili modelləri qoşa lampa böyük arxa fənərlərlə təchiz edilmişdir. Bunun nəticəsində bir tərəfli qaydada arxa fənərlərin imtinası riski azaldılmışdır. Yuxarıda yerləşdirilmiş tez işə düşən işıq diodlu stop-signalının təkrarlayıcısı arxadakı avtomobil sürücülərini qabaqcadan tormozlanmanın başlanması haqqında xəbərdar edir.

Arxa duman əleyhinə fənərlər də arxadan vurulma riskini azaldır. Araşdırma sisteminin söndürüldüyü anda fənər də avtomatik olaraq sönmür. Yol ayrıcına gələn avtomobilin qabaqcadan görünməsi üçün müasir *Volvo* modelləri arxada və qabaqda yan qabarit fənərləri ilə təchiz olunmuşlar.

Avtomobillər yol səthinin bilavasitə yaxınlığında avtomobilin altında temperaturu ölçmək üçün **xarici temperatur vericiləri** ilə təchiz oluna bilərlər. Verici temperaturun $+2\div-2$ dərəcə *Selsi* olduğunu göstərsə, sürücü mümkün donma haqqında məlumat alaraq, daha ehtiyatlı davranmağa başlayar. Xəbərdarlıq buz kristalını əks etdirən işıqlanmış simvol şəklində olur.

Sürücülərin gözlərinin qamaşdırılmasının qarşısının alınması üçün qamaşdırmadan avtomatik şəkildə qoruyan **arxa görünüş güzgüsü** quraşdırıla bilər. Elektroxromatik filtrlərdən istifadə edilməsi nəticəsində arxadakı avtomobilin fara işıqları ilə gözlərinin qamaşdırılmasının qarşısının alınması üçün güzgüyə birbaşa daxil olan işıq zəiflədir.

Bundan başqa belə filtrlərin tətbiqindən sonra sürücülərin gecə vaxtı hərəkət üçün arxa görünüş güzgülərinin tənzimlənməsinə ehtiyac qalmır.

Bəzən gecə vaxtı və pis hava şəraitlərində arxaya hərəkətlə park etmə çətinləşir. Bunun üçün avtomobil, işi arxa bəmperdə yerləşdirilmiş 4 ədəd vericiyə əsaslanan, arxaya hərəkət radarı ilə təchiz edilmişdir. Avtomobildən 1,5 m məsafədə adam və ya hər hansı bir əşya olarsa, sürücü səs signalı eşidir. Bu radar ancaq arxaya hərəkət pilləsi qoşulduqda işləyir. Qoşqu ilə hərəkət etdikdə də sistem işdən ayrıla bilər [2, s.147].

Audi kompaniyasının istehsalı olan **PMD (Photonic Mixer Devices) yüksək həssaslıqlı sistemi** nəqliyyat vasitəsinin qarşısında üçölçülü səhnəni əks etdirmək iqtidarındadır.

Bu sistem əşyanın çoxlu sayda nöqtələrindən eyni zamanda əks olunan siqnalları işləmək qabiliyyətinə malikdir. Üçölçülü təsviri hesablamaq üçün şüalandırıcı sxem tərəfindən verilən modullaşdırılmış dayaq siqnalları matrisasının hər pikselindən olan siqnalları müqayisə edir. Bu zaman elektronika kənar infraqırmızı şüaları (məsələn, günəşdən daxil olan) öz siqnallarından fərqləndirir.

Vericinin görünmüş sahəsi üfüqi müstəvidə 32° , şaquli müstəvidə isə 8° təşkil edir. Səhnələrin skanlama tezliyi 200 Hz olduğundan elektronika daha sürətli hadisələri qeydə ala bilər.

Citroen kompaniyasının işlədiyi **AFİL sistemi** avtomobilin yolun nişanlama xəttini qeyri-ixtiyari olaraq kəsməsi haqqında xəbərdarlıq edir. Sistem 80 km/saat sürətdən sonra işə düşür və vericilərin köməyi ilə dönmə signalı yandırılmamış halda nişanlama xəttinin kəsildiyini müəyyən edir. Nişanlama xəttinin kəsildiyi anda sistem titrəyişlərin köməyi ilə yorulmuş və ya diqqətsiz sürücüləri xəbərdar edir.

Volvo və *Ericsson* şirkətlərinin birgə hazırladıkları **Volvo on Call sistemi** qəzadan bilavasitə sonra təcili yardım avtomobili çağırır. Bu yeni sistem avtomatik olaraq və təhlükəsizlik yastıqları açıldıqda, ya da təhlükəsizlik kəmərlərinin qəza tarımlanması zamanı işə düşür. Sonra isə sistem rabitə kanalları vasitəsilə *Volvo on Call*-in təhlükəsizlik xidməti pultuna signal göndərir. Bununla

eyni zamanda avtomobilin quraşdırılmış *GPS* naviqasiya sistemində qeyd olunmuş koordinatları da göndərir.

Volvo on Call xidmətinin operatoru siqnalı aldıqdan sonra mobil rabitə kanalı vasitəsilə xəsarət almış avtomobilin sürücüsü ilə rabitə yaratmağa və qəza haqqında geniş məlumat almağa çalışır. Əgər operatorun çağırışına heç kim cavab verə bilmirsə, o, qəza yerinə xüsusi xilasedici qrup göndərir.

Avtomobilin hərəkəti müddətində onun koordinatları daimi olaraq «qara qutuda» qeyd olunduğundan naviqasiya sistemi sıradan çıxdıqda belə məlumatları almaq mümkün olur.

Sistemdəki «SOS» düyməsini basmaqla sürücü ona edilən hücum haqqında xəbər verir. Sürücü açarı itirdikdə sistemin köməyi ilə qapılar distansion şəkildə açıla bilər.

Simens kompaniyasının işlədiyi **LIDAR** (Light Detection and Ranging) **sistemi** duman, yağış və qar yağışı kimi məhdud görünmə şəraitlərində hərəkətin təhlükəsizliyinin yüksəldilməsinə xidmət edir. Pis görünmə şəraitində sistem qabaqda hərəkət edən avtomobilin stop-siqnallarını aşkar edir. Konstruktiv olaraq LIDAR vericisi infraqırmızı şüa mənbəyindən əks etdirilmiş görünməyən infraqırmızı şüaları qəbul edən fotodioddan və informasiyaları emal edən elektronikadan ibarətdir. Bu verici havadakı su hissəciklərini (duman, yağış) aşkar etmək imkanına malikdir. Nəticədə elektronika görünmənin pis olduğu halda nəticəyə gələrək, hərəkət sürətinin azaldılması barədə qərar qəbul edir. Bundan sonra elektronikanın köməyi ilə ya mühərrikin dövrlər sayı azaldılır, ya da tormozlar işə salınır.

Volvo kompaniyasının işlədiyi **DSTC** (*Dynamic Stability and Traction Control*) **sistemi** avtomobilin dinamik dayanıqlığına və dartıcı qüvvənin idarə olunmasına xidmət edir. Sistem avtomobilin sürücünün komandalarına düzgün reaksiyasını təmin edərək, onu öz əvvəlki hərəkət kursuna döndərir. Vericilər bütün dörd təkərin fırlanmasına, sükan çarxının dönmə bucağına və avtomobilin kurs istiqamətinə nəzarət edir.

Honda şirkətinin işlədiyi **VSA** (*Vehicle Stability Assist*) **sistemi** avtomobilin kurs stabilliyini təmin edir. Bu intellektual sistem ABS və təkərlərin boş fırlanmasının qarşısını alan sistemlərin cəmindən ibarətdir. VSA-nın elektron idarəetmə bloku aşağıdakı funksiyaları icra edir: öz alt sistemi vericilərinin məlumatlarından (saniyədə 25 dəfə periodikliyi ilə daxil olan) istifadə edərək, mühərrikin və transmissiyanın işini, hər bir təkərin fırlanma sürətini, tormoz sistemindəki təzyiqliyi, sükan çarxının dönmə bucağını və eninə təcili izləyir. Sükan çarxının dönməsinə və beləliklə də təkərlərin istiqamətinə görə VSA sistemi sürücünün hansı istiqamətdə hərəkət etmə istəyini qiymətləndirir. Hesablayıcı blok bu göstəriciləri uzlaşdıraraq, təhlükəli qəza vəziyyətlərini qeyd edir və komandaları hesablayaraq onları icra quruluşlarına göndərməklə avtomobilin müəyyən təkərlərini tormozlayır. Əgər hərəkət sürətini məhdudlaşdırmaq və ya mühərrikin gücünü azaltmaq lazım gələrsə, VSA-nın mühərrikin idarəetmə bloku ilə əlaqədə olan prosessoru gücü və dirsəkli valın dövrlər sayını korreksiya edir.

Volvo kompaniyasının işlədiyi **ROPS** (*Roll-over Protection System*) **sistemi** avtomobilin eninə (yamac) mailliyinə nəzarət edir. Sistemin mahiyyəti ondan ibarətdir ki, avtomobilin eninə mailliyinə sensorlar vasitəsilə nəzarət edilir. Əgər kompyutərə maillik bucağının artma sürətinin onun həddi qiymətinə çatdığı haqqında məlumat daxil olarsa, sistem bunu aşma təhlükəsi kimi qiymətləndirərək, yanacaq verilişini azaldır, yüklənmiş təkərlərin tormozlanması haqqında komandalar verir. Nəticədə avtomobil daha yastı trayektoriya üzrə hərəkət etdirildiyindən aşma riski azalır [3, s.306].

Məlumdur ki, yol nəqliyyat hadisələri müxtəlif səbəblərdən baş verir. Yollarda qəzaların baş verməsi ehtimalının azaldılmasında bu müasir sistemlərin rolu böyükdür. Bu sistemlərin avtomobillərə əlavə olaraq quraşdırılması avtomobilin maya dəyərinin artmasına gətirib çıxarır. Nəticədə avtomobil satışında problemlər yaranır. Məsələn bu səbəbdən avtomobil istehsalçıları bu müasir sistemlərin hamısının avtomobillərdə quraşdırılmasına maraqlı göstərmirlər. Bu isə yol nəqliyyat hadisələrinin azaldılmasına maneçilik törədir.

Avtomobillərə quraşdırılan müasir sistemlər sayəsində bu səbəblərdən baş verən yol nəqliyyat hadisələrinin azaldılmasına nail olmaq mümkündür.

ƏDƏBİYYAT

1. Həmidov M.M. Avtomobillərin konstruktiv təhlükəsizliyi. Bakı, 2013, 160 s.
2. Heydərov Ş.H., Bayramov R.P. Nəqliyyat vasitələrinin təhlükəsizliyi və avtotexniki ekspertizası. Bakı, 2009, 336 s.
3. Həsənov Ş.H., Cəfərov R.M., Bayramov R.P. Yol şəraitləri və hərəkətin təhlükəsizliyi. Bakı, 2013, 348 s.

ABSTRACT

A.Aliyev

Modern systems improve of car informing

Road accidents occur for various reasons. The exchange of information between cars has a very important role in active security.

The article showed and explained the modern car information improvement system. Thanks to these fog drive systems, rain and snow conditions of reduced visibility, such as stop lamps from detecting the vehicle's progress forward, the distance to the car in front, behind, left and right of the vehicle in the hazardous area of vehicles, the car on the road leaving Be able to obtain information about an arbitrary cut.

Through this system, braking in front of high car approaches, detecting objects in front of the car and using highly sensitive sensors reduce speed and will prevent a threat. The installation of these systems in cars will play an important role in their safety.

РЕЗЮМЕ

А.Алиев

Современные системы улучшение информированности автомобиля

Дорожно-транспортные происшествия происходят по разным причинам. Обмен информацией между автомобилям имеет очень важный роль в активной безопасности.

В статье были показаны и объяснены современные системы улучшение информацию автомобиля. Благодаря этим системы привода тумана, дождь и снег условий ограниченной видимости, такие как стоп-сигналы от обнаружения движения автомобиля вперед, расстояние до автомобиля впереди, сзади, слева и справа от транспортного средства в опасной зоне транспортных средств, автомобиль по дороге, не оставляющим будет иметь возможность получить информацию о произвольном срезе.

Посредством этой системы тормозящая перед высоким подходами автомобиля, обнаружения объектов в передней части автомобиля и с помощью высоко чувствительных сенсора снижаться скорость и будет предотвращена угроза.

Установка этих систем в автомобилях сыграют важную роль в их безопасности.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə çapa tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

Məqaləni çapa təqdim etdi: *Fizika üzrə fəlsəfə doktoru, dosent A.Abbasov*

KƏMALƏ TƏHMƏZBƏYOVA

Naxçıvan Dövlət Universiteti

UOT: 621.53

**ELMİ-TEXNOLOJİ PARKLARIN İNNOVATİV LAYİHƏLƏŞDİRİLMƏSİ
İSTİQAMƏTLƏRİ****Açar sözlər:** *milli standartlaşdırma sistemi, innovasiya, standartlaşdırma, beynəlxalq tələblər***Key words:** *innovation, standardization national standardization system, international requirements***Ключевые слова:** *национальная система стандартизации, международными требованиями, инновация, стандартизация*

Bu gün Azərbaycanın yeritdiyi sosial-iqtisadi siyasətin nəticəsidir ki, ölkəmiz dünya inteqrasiya prosesinə sürətlə adaptasiya olunmaqdadır. Lakin bu dövrdə onnovatik tərəqqini ləngidən, inkişaf etmiş ölkələrlə yüksək səviyyədə münasibətlər qurulmasına maneə olan amillərin aradan qaldırılmasına və ölkəmizin qloballaşmada iştirak payının artırılmasına imkan verən innovatik islahatların aparılmasına böyük ehtiyac yaranmışdır. Ölkədə bu innovatik tədbirlərin həyata keçirilməsinə ali təhsil məktəblərindən başlandı. Yəni təhsilin dövlət siyasətində prioritet rolunu nəzərə alaraq təhsil müəssisələrinin maddi-texniki bazasının müasir tələblər səviyyəsində möhkəmləndirilməsi, təhsilin məzmununun yeniləşdirilməsi, təhsil müəssisələrinin informasiya - kommunikasiya texnologiyaları ilə təhciz edilməsi və təhsil sisteminin informasiyalaşdırılması, onların innovatik fəaliyyətlərinin təkmilləşdirilməsi ali məktəblərdə global münasibətlərin qurulmasında və gələcək elmi texnoloji parkların yaradılmasında və ya idarə olunmasında kadrların hazırlanması irəliyə doğru inkişafın ən mühüm məsələlərindən biri idi. Yeni innovasiya texnologiyalarından istifadə olunmaqla dünya təhsil sistemində inteqrasiyaya imkan yaradan, bütövlükdə əhalini inteqrasiya və informasiya cəmiyyətinə hazırlamaq məqsədi güdən " Azərbaycan Respublikasında ümumtəhsil məktəblərinin informasiya -kommunikasiya texnologiyaları ilə təminatı" (5-15),2009-cu il proqramlarının icrası məhz bu sahəyə önəm verən Cənab Vasif Talıbovun rəhbərliyi ilə uğurla başa çatdırıldı. Belə uğurlu fəaliyyətin nəticəsidir ki, muxtar respublikada yeni texnologiyalardan istifadə imkanlarına malik bir cəmiyyət formalaşmışdır. Məsələn, NMR-də belə bir cəmiyyətin yaranması göstərir ki, artıq respublikada müasir tələblərə cavab verən yeni elmi - texnoloji parkların yaradılması vaxtı gəlib çatmışdır. Yetiştirilən ixtisaslı kadrlar tərəfindən texnoloji parkların yaradılmasına dövlət dəstəyi vacib məsələlərdəndir. Zənnimizcə deyilənlərin səmərəli həyata keçirilməsi üçün müəyyən şərtlər yerinə yetirilməlidir. Bunlar aşağıdakılardan ibarətdir: 1) Ali təhsil və digər müəssisə,təşkilatlarda praktiki tələblərə cavab verən layihələrin məhəlli sxemi 2) Keçmiş Sovet dövründə hazırlanmış QOST standartların yenilənməsi 3) Beynəlxalq tələblərə cavab verən informasiya analitik mərkəzinin yaradılması 4) Yüksək ixtisaslı kadrların hazırlanması zənnimizcə, verilən layihələrə sxematik baxışın keçirilməsi onların tələblərə uyğunluğunun yoxlanılması müəyyən mərhələdə həyata keçirilməlidir. Məsələn, sxem (1).

Layihənin təqdim olunma mərhələsi və ona baxışın keçirilməsi			
Layihənin eksiz sənədlərinə baxış	Layihənin keyfiyyət dərəcəsinin qiymətləndirilməsi	Layihənin iş prinsipi	Layihəni yoxlamaq
Layihənin qəbulu mərhələsi			
Layihənin məqsədi	Layihənin yeniliyi	Layihənin eksperimental yoxlanılması	Layihənin iqtisadi qiymətləndirilməsi
Elmi-texniki parklarda innovativ mərkəzin yaradılması və istehsalın təşkilinin inteqrasiyasının sxematik quruluşu			
Yeni elmi ideyalar verilməsi	İdeyanın sınaqdan keçirilməsi və qiymətləndirilməsi	praktikada keçirilməsi və	Yeni innovasiyaların reklam və satışının təşkili
Keyfiyyət nəzarət	Avtomatlaşdırma sisteminin quruluşu	Texno parkın fəaliyyətinin genişləndirilməsi və istehlakçılara əlaqələndirilir.	
Texno parkın vahid informasiya bazasının yaradılması istifadəsinin informasiyaya olan tələbinin ödənilməsi			
Konkret proqramların və layihələrin reallaşdırılması üçün maliyyənin araşdırılması (dövlət və qeyri-dövlət)			

Azərbaycanda iqtisadiyyatda islahatların aparıldığı bir şəraitdə əsas məsələlərdən biri istehsal və elmi təşkilatların innovasiya fəaliyyətinin artırılmasıdır. Hazırda bir çox müəssisələrdə zəif innovasiya təminatı mövcuddur. Bunun əsas səbəbləri aşağıdakılardan ibarətdir.

- 1) Bu sahədə qanunvericilik bazasının natamamlığı
- 2) Müəssisələrin şəxsi vəsaitlərinin çatışmamazlığı
- 3) İnnovasiya sferasında müxtəlif ölkələrlə zəif inteqrasiya

Muxtar Respublikanın sənaye potensialını artırmaq məqsəd ilə sənaye texnoloji parkın yaradılması bu məsələnin həllinə böyük təkan vermiş olacaqdır və aşağıdakı funksiyaları təmin edəcəkdir.

- 1) NMR-in iqtisadi cəhətdən inkişaf etdirmək
- 2) NMR-in tədris sahələrinin yaxşılaşdırılması
- 3) NMR-nın təhsil sahələrində, laboratoriya mərkəzlərində elmi-tədqiqat işlərinin mükəmməlləşdirilməsi və s. Bu gün texno-parkların yaradılması və fəaliyyətinin tənzimlənməsinin dövlət dəstəyinə böyük ehtiyacı var. Texno-parkların yaradılması onun təhcizat bazasının da müəyyənəndirilməsini ön plana çəkir. Bu zaman texno-parkların menecmentinin və marketoloqun üzərinə müəyyən məsuliyyət düşür.

- 1) Təşkilati texniki tədbirlərin həyata keçirilməsi
- 2) Parkların təhcizat bazasının müəyyənəndirilməsi ilə yanaşı, özünün də müəyyən qurumlar üçün təhcizatçıya çevrilməsi

- 3) İnnovativ ideyalar və texnologiyalar üçün məlumatlandırma bazalarının yaradılması
- 4) İnnovasiyaların yaradılması üçün maliyyə dəstəyinin tapılması və yaradıcının həvəsləndirilməsi
- 5) yaradılan faydalı ideya, model sənaye nümunələrinin hüquqi mühafizəsinin həyata keçirilməsi
- 6) Menecer və marketoloqların səyləri əsasında no-nau proqramlarının keçirilməsinin təşkili və s.

Yeni elmi-texniki parkların yaradılması gələcəkdə onlar arasında rəqabətin formalaşmasına imkan verəcək. Belə ki rəqabətin udulması marketoloqun düzgün fəaliyyət planını seçməsindən çox asılıdır. O innovasiyalı məhsulların (ideya model) təqdim olunması yollarını seçir və onu qiymətləndirir, problem xarakterli bir sıra xüsusiyyətin aşkarlanmasına və aradan qaldırılmasına səylər göstərir. Marketoloq fəaliyyəti texno-parkların fəaliyyətlərini, strateji məqsədlərinin formalaşdırılmasının mühüm elementi sayılır.

Elmi-texniki parkların yaradılmasında bu gün Universitetlərin rolu danılmazdır və bunun müstəsna nəticələri var.

- 1) Universitetlərdə elmi-texniki parkların yaradılması elmi tədqiqatların aparılması üçün başa sayılır.
- 2) tədqiqatların nəticələri universitetlərdə yaradılan texno-parklar və biznes inqobatorları vasitəsilə praktikadan keçirilir
- 3) Müasir tələblərə cavab verən insan potensialının, insan resurlarının yaradılmasından məhz universitetlərdə yaradılır.

Qloballaşma müxtəlif ölkələrin innovasiyalarının, modellərinin və s. yaradılmasında və təqdim olunmasında, ümumi meyllər formalaşmışdır. Belə ki dünya ölkələri innovasiya fəaliyyətinin stimullaşdırılmasında maraqlıdırlar. Çünki müasir dövrdə rəqabət sistemində yalnız innovasiyalı istehsal qalib gəlir. İqtisadi ədəbiyyatlara nəzər salsaq ümumi meyllərə klaster yanaşması adı verilmişdir. Klaster nəzəriyyəsinin banisi Amerikan iqtisadçısı Maykl Porter (1947 özüünün "Rəqabət" əsərində) ilk dəfə klasterə tərif vermişdir. Klaster coğrafi əlamətlərə görə təmərkləşmiş qarşılıqlı əlaqəli şirkətlər qrupu, ixtisalaşmış malgöndərənlər, müvafiq sahələrdə firmalar və onların fəaliyyəti ilə əlaqədar müəyyən sahələrdə rəqabətdə olan və eyni zamanda birgə iş görən təşkilatlardır.(8-485)

Bazar iqtisadiyyatı şəraitində fəaliyyət göstərən elmi-texniki sənaye parklarının mükəmməl, formalaşmış fəaliyyətini, zənnimizcə klasterlər sinfinə aid etmək olar. Qarşılıqlı əlaqədə fəaliyyət göstərən müəssisələr ölkənin ayrı-ayrı əlaqəli sahələrinin innovativ təşkilinə və rəqabətdə davamlılığına, maliyyə təminatına və s.təkan vermiş olur. Klasterlərin bu keyfiyyətini nəzərə alan Cənab İlham Əliyev 2014-cu il oktyabrın 8-də NR ölkənin 9 aylıq sosial-iqtisadi inkişafının yekunları və qarşıda duran vəzifələri həsr edilmiş iclasında sənayenin sürətli və effektiv inkişafının təmin etmək məqsədilə sənaye klasterlərinin yaradılmasının vacibliyini söyləmişdir.(2)

Zənnimizcə, klasterləri sistemli fəaliyyət növlərinə aid etmək yerinə düşər. Lakin bir şeyi etiraf etmək lazımdır ki, belə klasterlər iri inhisar xarakterli fəaliyyəti xatırladır. Klaster ayrı-ayrı sahələrin birgə fəaliyyəti olmasına baxmayaraq onların idarəçiliyi mərkəzləşdirilmiş xarakter daşıyır.Tədqiqatın obyektindən və predmetindən asılı olaraq iqtisadi ədəbiyyatlarda innovasiya proses,sistem dəyişiklik və nəticə kimi vurğulanır. "Elmi -texniki tərəqqi" lüğətində qeyd edilir ki, innovasiya yeni məlumatların, texnologiyaların işlənməsinə,yaradılmasına və yayılmasına,yeni təşkilati formaların tətbiqinə yönəldilən yaradıcı fəaliyyətin nəticəsidir.(3-240)

Hazırkı şəraitdə innovasiyaların standartlaşmasının yeni tələblər əsasında qurulması problem olaraq qalmaqdadır. Standartlaşdırma məhsullara,xidmətlərə və ümumilikdə hər hansı bir fəaliyyətdə və onun nəticəsinə dair mövcud və potensial problemləri həll etmək üçün göstəricilərin optimal əldə edilməsinə yönəldilmiş, ümumi və təkrar istifadə üçün nəzərdə tutulan tələblərin müəyyən edilməsi məqsədi ilə standartların hazırlanması, qəbulu və tətbiqi prosesindən ibarət olan bir fəaliyyətdir (44-15).

Azərbaycan bazar iqtisadiyyatı şəraitində innovativ standartlaşma keçmiş Sovet məkanında hazırlanmış QOST standartına əsaslanır. Hazırda Azərbaycanda normativ sənədlərin dövlət

fondunda 21504 standart mövcuddur. Onun cəmi 688-i Azərbaycan Dövlət Standartına aiddir. Hazırki şəraitdə Azərbaycanda innovativ Milli Standartların yaradılmasına böyük ehtiyac vardır.

ƏDƏBİYYAT

1. Портер М. Конкуренция, Реқ.санçл. Москва, UD "Bilyams (1-485s.) Moskva, 2005
2. Azərbaycan qəzeti. 9 oktyabr, 2014-cu il .
3. Трафилова А.А.(2005) Оценка эффективности инновационного развития предприятия. Москва, Статистика-304
4. DTİ. The Emprical Economiks of standarts. DTİ Economiks Paper 12. London, 2005, 65 pg.
5. "Кооперасија". Elmi-praktiki jurnal. N-1(36) 2015
6. Azərbaycan statistika göstəriciləri, Bakı, 2014

ABSTRACT

Kamala Tahmazbayova

INNOVATIVE DEVELOPMENT PROCESSES OF SCIENTIFIC TECHNOLOGY PARKS

The problems being considered in the article are dedicated to the analysis of the existing technoparks in tie developing countries and the department management of a created technological park on the basis of university .The article provides a block diagram of the control innovation potential in the regions by the example innovative potential of subjects. As known,innovation is one of key driver of dynamic development of the economy in modern world. And several factors are affecting development of innovation one of which is standardization. International researches approve that standardization may have significant contribution to the development of innovation through several ways.

РЕЗЮМЕ

Камале Тахмазбайова

ИННОВАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ РАЗВИТИЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ПАРКОВ

Как известно, инновация является одним из основных средств, обеспечивающих динамичное развитие экономики страны в современной период. Одним из многих факторов, влияющих на развития инновации,является стандартизация. Международный анализ показывает, что стандартизация может существенно поддержать развитие инновации многими средствами. Однако для этого необходимо привести национальную систему сдандартизации в соответствие с международными требованиями и переводом щпытом, в противном случае без этого стандартизация может превратиться в инструмент препятствования инновации. Поэтому, в эещй статье исследуются влияния стандартизации на развитие инноции и реформы,которые необходимо реализовать в национальной системе стандартизации для направления этих влияний в положительное русло.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə çapa tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

Məqaləni çapa təqdim etdi: *Fizika üzrə fəlsəfə doktoru, dosent A.Abbasov*

AYDIN İSAYEV

Azərbaycan Dövlət Aqrar Universiteti

UOT 631.331.06

TORPAQ YUMŞALDAN İŞÇİ ORQANIN İŞLƏNƏN MÜHİTLƏ QARŞILIQLI ƏLAQƏSİNİN RİYAZİ MODELİNİN QURULMASI

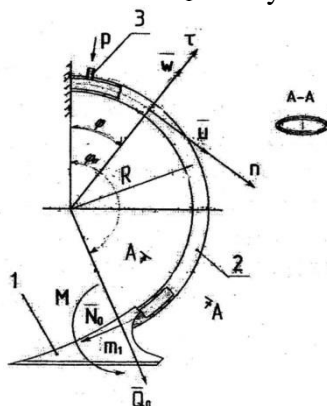
Keywords: *soil cultivation, working organ, mathematical model, elastic force, external forces, pressure, stand*

Ключевые слова: *почвообработка, рабочий орган, математическая модель, упругая сила, внешние силы, давление, стойка*

Hazırkı dövrdə daha çox enerji tutumlu əməliyyat olan torpağın işlənməsində titrəyişli təsirdən istifadəyə xüsusi diqqət yetirilir. Torpağı işləyən orqanın dartı müqavimətinin azaldılması əsasən yaylı dayaqlardan və xüsusi materiallardan istifadə hesabına həyata keçirilir.

Ancaq bunlar torpağın işlənmə dərinliyi və torpağın fiziki – mexaniki xassələri dəyişdikdə işçi orqanın konstruktiv parametrlərini dəyişmədən istənilən nəticəni vermir. Odur ki, dartı müqavimətinin azaldılması və keyfiyyət göstəricilərinin artırılması yollarının öyrənilməsi olduqca aktual məsələdir.

Qarşıda duran məsələnin həlli üçün işçi orqanın torpaqla qarşılıqlı təsirinin riyazi model əsasında təhlilinə çalışırıq. İşçi orqan əyri elliptik en kəsikli olub, bir tərəfi möhkəm bərkidilmiş digər tərəfi isə sərbəstdir (şəkil 1). Sərbəst tərəfində m_1 kütləyə malik yumşaldıcı pəncə vardır.



Şəkil 1. Torpaq işləyən işçi orqanın hesabat sxemi:

1 – yumşaldıcı pəncə; 2 – dayaq; 3 – ştuser.

Borunun daxilində dəyişəbilən $p(t)$ təzyiqinin yaranması mümkündür. Bundan başqa pəncəyə torpağın bərabər təsir göstərən müqavimət qüvvələri təsir göstərə bilər. Bunun toplananları ox boyu N qüvvəsi eninə təsir göstərən Q qüvvəsidir. Bunlar toxunan istiqamətində və dayaq oxuna normal istiqamətindədir. Həmçinin M momenti təsir göstərir. Borunun uzunluğu en kəsikdən xeyli böyükdür. Buna görə borucuğa R radiuslu qövs üzrə əyilmiş çubuq kimi baxırıq. Pəncənin kütləsi m_1 borunun kütləsindən m_0 xeyli böyükdür.

Dalamber prinsipinin [1] köməyi ilə tarazlıq tənliyinə əsasən çubuğun hərəkət tənliyini yazmaq mümkündür:

$$\left. \begin{aligned} \gamma(\varphi) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial N}{R \partial \varphi} - \frac{\partial M}{R^2 \partial \varphi} \\ \gamma(\varphi) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= \frac{N}{R} - \frac{\partial^2 M}{R^2 \partial \varphi^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$N = \frac{D}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} + W \right); \quad M = \frac{H}{R^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right); \quad Q = -\frac{\partial M}{R \partial \varphi} \quad (2)$$

$\varphi = 0$ nöqtəsində məhdudlaşdırıcı şərtlər:

$$u(o, t) = 0; \quad w(o, t) = 0; \quad \frac{\partial w(o, t)}{\partial \varphi} = 0, \quad (3)$$

$\varphi = \varphi_o$ nöqtəsində isə

$$N(\varphi_o, t) = f_\tau; \quad Q(\varphi_o, t) = f_n; \quad M(\varphi_o, t) = f_m \quad (4)$$

Başlanğıc şərtlər aşağıdakı kimi ola bilər:

$$\left. \begin{aligned} u(\varphi, o) &= u_o(\varphi); \quad \frac{\partial u(\varphi_2, o)}{\partial t} = 0; \\ W(\varphi, o) &= W_o(\varphi); \quad \frac{\partial w(\varphi_1, o)}{\partial t} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

burada $u(\varphi, t)$, $W(\varphi, t)$ – çubuq oxunun φ koordinatlı nöqtəsinin hərəkəti;

$N(\varphi, t)$, $Q(\varphi, t)$ – ox boyunca və eninə qüvvələr;

$M(\varphi, t)$ – φ .en kəsiyində əyici moment;

$D = E.A$ – ox boyunca borucuğun sərtliyi;

$H = E.J$ – borucuğun əyilmə sərtliyi;

E – borucuq materialının elastiklik modulu;

$\gamma(\varphi)$ – borucuğun poqon kütləsi;

f_τ, f_n, f_m – yumşaldıcı pəncəyə torpaq tərəfindən təsir göstərən qüvvələr.

Bunlar həmçinin t, u, w, p –dən və torpağın fiziki-mexaniki xassələrindən asılı ola bilərlər.

İşçi orqanın kütləsini nəzərə almaq üçün borucuğun uzunluğu boyunca kütləsini poqon kütləsi hesab edirik. Təxmini olaraq sistemə, çubuq tərəfindən elastiklik qüvvəsi və xarici f_τ, f_n –qüvvələri təsir göstərən maddi nöqtə kimi baxmaq olar [2]. Nöqtənin hərəkətinə yalnız borucuq elementinin ayrılik müstəvisində baxırıq. Onda nöqtə iki sərbəstlik dərəcəsinə (u və w) malik olur.

Çubuğun kütləsini kənarlaşdırdığımız üçün (1) tənlikləri aşağıdakı şəkllə düşürlər:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{d\varphi} - \frac{dM}{R d\varphi} &= 0 \\ N + \frac{d^2 M}{R d\varphi^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$\varphi = 0$ olduqda məhdudlaşdırıcı şərtlər:

$$u = W = W^1 = 0. \quad (7)$$

$\varphi = \varphi_o$ olduqda hərəkətin verilmiş olduğunu və dönmə bucağının θ olduğunu hesab edirik:

$$u(\varphi_o) = U_o; \quad W(\varphi_o) = W_o; \quad \theta(\varphi) = \theta_o. \quad (8)$$

Birinci tənliyi (7) φ –yə görə differensiallaşdırıb ikinci ilə toplayırıq:

$$\frac{d^2 N}{d\varphi^2} + N = 0 \quad (9)$$

Bu ifadənin ümumi həlli isə

$$N = C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi. \quad (10)$$

(2) –yə görə

$$Q = -\frac{dM}{R d\varphi} = -\frac{dN}{d\varphi} = -C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi. \quad (11)$$

(11) –dən tapırıq

$$\frac{dM}{d\varphi} = RC_1 \cos\varphi + RC_1 \sin\varphi \quad (12)$$

Buradan

$$M = RC_1 \sin\varphi + RC_2 \cos\varphi + C_3. \quad (13)$$

(10), (11) və (12) ifadələrində C_1 , C_2 və C_3 –ü N , Q və M –ilə əvəzləyək

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= N \sin\varphi - Q \cos\varphi, \\ C_2 &= N \cos\varphi - Q \sin\varphi, \\ C_3 &= M - R \cdot N \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

(5) ifadəsindən hərəkəti təyin edirik:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{d\varphi} + W &= \frac{R}{D} N \\ -\frac{du}{d\varphi} + \frac{d^2W}{d\varphi^2} &= \frac{R^2}{H} M \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Hədlərlə toplayırıq:

$$\begin{aligned} \frac{d^2W}{d\varphi^2} + W &= \frac{R}{D} N + \frac{R^2}{H} M = \frac{R^3}{H} \left(1 + \frac{H}{R^2 D}\right) C_1 \sin\varphi + \\ &+ \frac{R^3}{H} \left(1 + \frac{H}{R^2 D}\right) C_2 \cos\varphi + \frac{R^2}{H} C_3 \end{aligned} \quad (16)$$

Real məsələlərdə aşağıdakı ölçüsüz kəmiyyətdir:

$$\frac{H}{R^2 D} \leq 1 \quad (17)$$

C_1 ilə müqayisədə bu kəmiyyəti kənarlaşdırırıq. Bu şəkildə təxmini yanaşma ona ekvivalentdir ki, D – sonsuz böyükdür, başqa sözlə borucuğun oxu uzanmır.

Onda alırıq:

$$\frac{d^2W}{d\varphi^2} + W = \frac{R^3}{H} \sin\varphi C_1 + \frac{R^3}{H} \cos\varphi C_2 + \frac{R^2}{H} C_3 \quad (18)$$

Bu tənliyin ümumi həlli yekcins tənliyin ümumi və qeyri yekcins tənliyin xüsusi həllərinin cəmi kimi həll oluna bilər:

$$W = -\frac{R^3}{2H} \varphi \cos\varphi C_1 + \frac{R^3}{2H} \varphi \sin\varphi C_2 + \frac{R^2}{H} C_3 + \sin\varphi \cdot C_4 + \cos\varphi C_5 \quad (19)$$

Tөрәмәsini tapırıq:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\varphi} &= \frac{R^3}{2H} (-\cos\varphi + \varphi \sin\varphi) C_1 + \frac{R^3}{2H} (\sin\varphi + \varphi \cos\varphi) C_2 + \\ &+ \cos\varphi \cdot C_4 - \sin\varphi C_5 \end{aligned} \quad (20)$$

(15) ifadəsindən tapırıq:

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{R}{D} N - W \quad (21)$$

Buraya (10) və (19) ifadələrini əlavə edib inteqralladıqda alırıq:

$$\begin{aligned} u &= \frac{R^3}{2H} (\cos\varphi + \varphi \sin\varphi) C_1 - \frac{R^3}{2H} (\sin\varphi - \varphi \cos\varphi) C_2 - \frac{R^2}{H} \varphi C_3 + \\ &+ \cos\varphi C_4 - \sin\varphi C_5 + C_6 \end{aligned} \quad (22)$$

Hüdüd şərtlərin köməyi ilə C_4 , C_5 , C_6 qeyri müəyyən əmsalları C_1 , C_2 və C_3 ilə əvəzləyirik. $\varphi = 0$ olduqda (22) ifadəsinə (20) və (21) –i yazaraq alırıq:

$$\left. \begin{aligned} u(0) &= \frac{R^3}{2H} C_1 + C_4 + C_6 = 0 \\ W(0) &= \frac{R^2}{H} C_3 + C_5 = 0 \\ W'(0) &= \frac{R^3}{2H} C_1 + C_4 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Buradan tapırıq:

$$C_4 = \frac{R^3}{2H} C_1; \quad C_5 = \frac{R^3}{H} C_3; \quad C_6 = \frac{R^3}{2H} C_1 - C_4 = -\frac{R^3}{H} C_1. \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} C_4 &= \frac{R^3}{2H} \sin\varphi N - \frac{R^3}{2H} \cos\varphi Q, \\ C_5 &= \frac{R^3}{H} N - \frac{R^2}{H} M, \\ C_6 &= \frac{R^3}{2H} \sin\varphi N + \frac{R^3}{2H} \cos\varphi Q. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Nahəyət (24) və (22) –yə alınmış (25) və (19) ifadələrini qoyub N , Q və M qüvvələri ilə hərəkət tənliklərini əldə edirik:

$$u = \frac{R^3}{H} \left(\frac{3\varphi}{2} + \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{2} - 2\sin\varphi \right) N + \frac{R^3}{H} \left(\cos\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{2} - 1 \right) Q + \frac{R^2}{H} (\sin\varphi - \varphi) M, \quad (26)$$

$$W = \frac{R^3}{H} \left(\cos\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{2} - 1 \right) N + \frac{R^3}{H} \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{2} \right) Q + \frac{R^2}{H} (1 - \cos\varphi) M. \quad (27)$$

Əgər $\varphi = \varphi_0$ nəzərə alsaq o zaman pəncənin $u_0 = u(\varphi_0)$ və $W_0 = W(\varphi_0)$ hərəkətinin çubuğun ucuna tətbiq edilmiş $N_0 = N(\varphi_0)$, $Q_0 = Q(\varphi_0)$ qüvvələri və $M_0 = M(\varphi_0)$ momentinin təsirindən asılılığını alırıq.

(26) –ni aşağıdakı şəkildə yazırıq:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= P_{11}N_0 + P_{12}Q_0 + P_{13}M_0 \\ W_0 &= P_{21}N_0 + P_{22}Q_0 + P_{23}M_0 \end{aligned} \right\}, \quad (28)$$

burada

$$\left. \begin{aligned} P_{11} &= \frac{R^3}{H} \left(\frac{3\varphi_0}{2} + \frac{\sin\varphi_0 \cdot \cos\varphi_0}{2} - 2\sin\varphi_0 \right), \\ P_{12} &= \frac{R^3}{H} \left(\cos\varphi_0 + \frac{\sin^2\varphi_0}{2} - 1 \right), \\ P_{13} &= \frac{R^2}{H} (\sin\varphi_0 - \varphi_0), \\ P_{21} &= \frac{R^3}{H} \left(\cos\varphi_0 + \frac{\sin^2\varphi_0}{2} - 1 \right) \\ P_{22} &= \frac{R^3}{H} \left(\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\sin\varphi_0 \cdot \cos\varphi_0}{2} \right), \\ P_{23} &= \frac{R^2}{H} (1 - \cos\varphi_0). \end{aligned} \right\}, \quad (29)$$

N_0 və Q_0 –i U_0 , W_0 , M_0 ilə əvəz edək:

$$\left. \begin{aligned} P_{11}N_0 + P_{12}Q_0 &= U_0 - P_{13} \cdot M_0, \\ P_{21}N_0 + P_{22}Q_0 &= W_0 - P_{23} \cdot M_0. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Bu sistemi Kramer düsturları [3] ilə həll edərək alırıq:

$$\left. \begin{aligned} N_o &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{P_{22}}{\Delta} U_o - \frac{P_{12}}{\Delta} W_o - \frac{P_{22} \cdot P_{13} - P_{23} \cdot P_{12}}{\Delta} M_o, \\ Q_o &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{P_{21}}{\Delta} U_o + \frac{P_{11}}{\Delta} W_o - \frac{P_{23} \cdot P_{11} - P_{13} \cdot P_{21}}{\Delta} M_o \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Əvəzetmə apararaq:

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= \frac{P_{22}}{\Delta}; C_{12} = -\frac{P_{12}}{\Delta}; C_{13} = \frac{P_{22} \cdot P_{13} - P_{23} \cdot P_{12}}{\Delta} \\ C_{21} &= -\frac{P_{21}}{\Delta}; C_{22} = \frac{P_{11}}{\Delta}; C_{23} = \frac{P_{23} \cdot P_{11} - P_{13} \cdot P_{21}}{\Delta} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Onda

$$\left. \begin{aligned} N_o &= C_{11}U_o + C_{12}W_o - C_{13}M_o, \\ Q_o &= C_{21}U_o + C_{22}W_o - C_{23}M_o \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

burada N_o, Q_o – pəncə tərəfindən boru elementinə təsir göstərən qüvvələr,

U_o, W_o – boru elementi ucunun hərəkəti (yer dəyişməsi);

M_o – boru elementinə təsir göstərən moment.

Moment M_o , boru ayrılıyının dəyişməsi ilə daxili təzyiq $-p$ tərəfindən yarana bilər. Bu ayrılıyın ucunun hərəkətini (yer dəyişməsini) təyin etdikdə hesab edilir ki, borucuğun bütün en kəsiklərində moment eynidir [4]. Buna görə də onun borunun ucuna tətbiq edildiyi və M_o –a bərabər olduğu hesab edilir.

Yumşaldıcı orqanın hərəkətinin differensial tənliklərini tərtib etmək üçün ona təsir göstərən qüvvələr məlum olmalıdır. Dayaq tərəfindən pəncəyə \bar{N}_o və \bar{Q}_o qüvvələri təsir göstərir. Bundan başqa ona verilmiş məhdudiyət daxilində (4) f_τ və f_n xarici qüvvələr də təsir göstərir.

τ və n oxları olan koordinat sistemində pəncənin hərəkət tənliyini aşağıdakı kimi yazmaq olar.

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 u}{dt^2} &= -N_o + f_\tau \\ m_1 \frac{d^2 W}{dt^2} &= -Q_o + f_n \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

(33) ifadəsindən \bar{N}_o və \bar{Q}_o üçün qiymətləri yazdıqda alırıq:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 W}{dt^2} + C_{11}U_o + C_{12}W_o &= f_\tau + C_{13} \cdot M_o \\ m_2 \frac{d^2 W}{dt^2} + C_{21}U_o + C_{22}W_o &= f_n + C_{23} \cdot M_o \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, C_{13}, C_{23}$ sabitləri (29) və (32) düsturlarından tapılır.

(35) hərəkət tənlikləri adi differensial tənliklərdir. Bunların köməyi ilə torpağı işləyən işçi orqanın hesabatını aparmaq və prosesi təhlil etmək mümkündür.

ƏDƏBİYYAT

1. Добронравов В.В. Основы аналитической механики. М., Высшая школа, 1976, 264 с.
2. Устинов Н.Н. Расчет и проектирование тонкостенных манометрических трубчатых пружин с переменной по периметру сечения толщиной стенки. // Естественные и технические науки. 2003, №3(6), с. 68-85
3. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М., Наука, 1970, 400 с.
4. Айнбиндер А.Б. Расчет магистральных и промысловых трубопроводов на прочность и устойчивость. Справочное пособие. М., Наука, 1991. 288 с.

РЕЗЮМЕ

Исаев Айдын

Разработка математической модели взаимодействия почворыхлящего рабочего органа с обрабатываемой средой

Подчеркивается актуальность теоретической оценки пружинно опорной конструкций почвообрабатывающих рабочих органов вибрационного воздействия с позиции энергосберегающей технологии. Обоснование конструктивных параметров рабочих органов почвообрабатывающего орудия в зависимости от изменения глубины обработки и физико – механических свойств почвы определена в качестве цели исследования. Метододической базой для решения поставленных задач служит построение и анализ математической модели, описывающей взаимодействия почвы с рабочим органом. В качестве объекта исследования взята полусферический рыхлитель с эллиптическим поперечным сечением, у которого один конец имеет жесткое крепление, а другой – свободного положения. Расчетная схема представляет собой приложенные к материальной точке внешние силы и силы со стороны балки. Движение материальной точки рассматривается на кривой плоскости трубчатого элемента. Составлены дифференциальные уравнения движения рыхлительного органа. Здесь учитываются также силы, действующие на рыхлительные лапы. Разработана математическая модель установки для полевых испытаний экспериментального почворыхлящего рабочего органа. Предложенная математическая модель позволяет провести динамический анализ при взаимодействии рабочего органа с обрабатываемой средой, проверить адекватность выбранного конструктивного варианта к заданным требованиям.

ABSTRACT

Isayev Aydin

Development of the mathematical model interaction of the soil-washing worker Body with the processed environment

The urgency of the theoretical evaluation of the spring support structure of soil-cultivating vibrational working bodies from the standpoint of energy-saving technology is emphasized. The rationale for the design parameters of the working organs of the tillage tool, as a function of the change in processing depth and the physico-mechanical properties of the soil, is defined as the purpose of the study. The methodological basis for solving the problems posed is the construction and analysis of a mathematical model describing the interaction of the soil with the working organ. The object of the study is a hemispherical ripper with an elliptical cross-section in which one end has a rigid fixation and the other has a free position. The design scheme is the girders attached to the material point in external forces and forces. The motion of the material point is considered on the curve of the plane of the tubular element. Differential equations of movement of the ripping organ are made. Here, also the forces acting on the ripper legs are taken into account. A mathematical model of the installation for field testing of the experimental soil-loosening working organ was developed. The suggested mathematic model allows us to conduct a dynamic analysis in the interaction of the working organ with the processed medium, check the adequacy of the selected structural option to the specified requirements.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə çapa tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

Məqaləni çapa təqdim etdi: *Fizika üzrə fəlsəfə doktoru, dosent A.Abbasov*

METODİKA

FATMA HACIYEVA

Naxçıvan Dövlət Universiteti

Fatmahaciyeva@gmail.com

UOT: 372.8:512

KƏSR HAQQINDA ANLAYIŞIN VERİLMƏSİNDƏ RİYAZİ NİTQİN İNKİŞAF ETDİRİLMƏSİ

Açar sözlər: ədəd, hissə, düzbucaqlı, şagird, uzunluq, parça, kəsr

Key words: number, rectangle, pupil, length, material, fraction

Ключевые слова: число, часть, прямоугольник, ученик, длина, отрезок, дробь

Şagirdlər kəmiyyətləri öyrənərkən bərabər hissələr anlayışı ilə əyani tanış olur və bununla da ədəd anlayışı tədricən dərinləşdirilir. Bununla əlaqədar inkişafetdirici çalışmaları nəzərdən keçirək.

1. Uzunluğu 16 xana və eni 2 xana olan düzbucaqlı çəkin və aşağıdakı suallara cavab verin:

1) düzbucaqlıda cəmi neçə xana var?

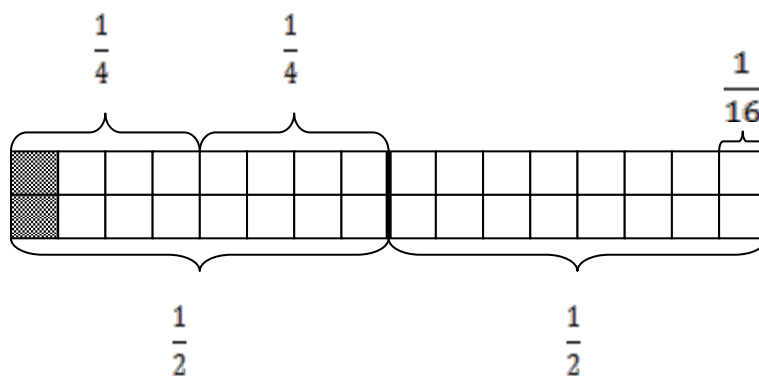
2) düzbucaqlının $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ hissələrində neçə xana yerləşir?

3) düzbucaqlının $\frac{1}{8}, \frac{1}{10}$ hissəsində ayrılıqda neçə xana yerləşir?

4) tam düzbucaqlıda neçə dənə yarım ($\frac{1}{2}$) yerləşir? Neçə dənə dördü bir, səkkizdə bir yerləşir?

5) düzbucaqlının yarısında neçə dənə dördü bir yerləşir? Neçə dənə səkkizdə bir yerləşir?

Göstəriş: düzbucaqlının uzunluğunu 16 bərabər hissəyə və enini iki bərabər hissəyə ayıraraq (yarıya bölmə qaydasına əsasən), tələb olunanları əyani təsvir etmək lazımdır (şəkil 1).



Şəkil 1.

6) düzbucaqlının $\frac{2}{2}, \frac{4}{4}, \frac{8}{8}$ hissələrində ayrılıqda neçə xana yerləşir?

Göstəriş: $\frac{2}{2} = 1$, yəni düzbucaqlı neçə xanaya bölünmüşdür? – sualına “32 xana” cavabını vermək lazımdır.

7) düzbucaqlının $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}$ hissəsində ayrılıqda neçə xana yerləşir? – sualına cavabı: düzbucaqlının yarısında $32:2=16$ (xana) olacaqdır.

8) düzbucaqlının $\frac{3}{4}, \frac{6}{8}$ hissəsində ayrılıqda neçə xana yerləşir? – sualının cavabı: düzbucaqlının

$\frac{1}{4}$ hissəsində 8 xana, $\frac{3}{4}$ hissəsində isə $8 \cdot 3 = 24$ (xana) olacaqdır. $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ olduğundan, cavab əvvəlki kimi olacaqdır.

Beləliklə, şagirdlər ilk dəfə əyani-konkret və induktiv metod əsasında:

a) $1 = \frac{2}{2} = \frac{4}{4} = \frac{8}{8}$

b) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$

c) $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

d) $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{8}{16}$

2. Uzunluğu 6 xana və eni 2 xana olan düzbucaqlı çəkin və onun $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ hissəsində ayrılıqda neçə xana var?

1) bu düzbucaqlının yarısında, üçdə birində, altıda birində olan xanaları götürsək, hər dəfə neçə xana qalacaqdır?

Nümunə: düzbucaqlının $\frac{1}{3}$ hissəsi xanaların sayına görə eyni olsa da, formaca – biri kvadrat, o biri isə düzbucaqlı zolaq şəklindədir.

Bu şəkil (şəkil 2.) əsasında $1 = \frac{3}{3} = \frac{6}{6}; \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ münasibətləri həm əyani və həm də riyazi şəkildə nümayiş etdirilir və şagirdlər hər iki halı tələffüz edirlər.

Ümumiyyətlə, ölçüləri müxtəlif ədədlərlə ifadə olunmuş düzbucaqlıların xanaları sayı əsasında nisbətənin mühüm xassəsi əyani şəkildə nümayiş etdirilir. Əslində şagirdlər kəsrin (düzgün) əsas xassəsi ilə: kəsrin sürəti və məxrəcini eyni bir ədədə (sıfırdan fərqli) vursaq və ya bölsək, kəsrin qiyməti dəyişməz – tanış olurlar.

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ və ya $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$ kimi münasibətlərdə soldan sağa – hissələrin xırdalanması, sağdan sola isə - hissələrin irəliləşdirilməsi prosesi gedir. $\frac{1}{2}$ və $\frac{2}{4}$ kəsrləri (hissələri) qiymətcə bərabər olan müxtəlif kəsrlərdir: hər hansı kəmiyyət 2 bərabər hissəyə bölünüb, bir hissəsi götürülmüşdür; ikinci halda həmin kəmiyyət 4 bərabər hissəyə bölünüb, 2 hissəsi götürülmüşdür. Birinci halda say sistemi ikilik sistemdə, ikinci halda isə dördlük sistemdə tətbiq olunur.

$\frac{2}{2} = 1; \frac{4}{4} = 1$ münasibətləri bölmə prosesində bütün hissələrin götürüldüyünü göstərir.

İndi tam ədədin hissəsini və verilən hissəsinə görə tamın tapılmasına aid məsələlər həlli prosesində şagirdlərin riyazi nitqinin inkişaf etdirilməsini nəzərdən keçirək.

1. 18sm-lik parça çəkin və onun $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{3}{6}, \frac{3}{9}$ hissələrinin uzunluğunu tapın. Hissələri göstərin və riyazi şəkildə əsaslandırın.

Göstəriş: 1) $18\text{sm}:2=9\text{sm}$; 2) $18\text{sm}:3=6\text{sm}$; $6\text{sm}\cdot2=12\text{sm}$ 3) $18\text{sm}:9=2\text{sm}$; $2\text{sm}\cdot2=4\text{sm}$

2. 1dm2sm uzunluğunda parça çəkin və onun

$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ hissələrinin uzunluqlarını tapın.

Göstəriş: 1dm 2sm=12sm, $12\text{sm}:6=2\text{sm}$, $2\text{sm}\cdot2=4\text{sm}$, $12\text{sm}:6=2\text{sm}$, $2\text{sm}\cdot3=6\text{sm}$

3. 1dm 6sm uzunluğunda parçanın

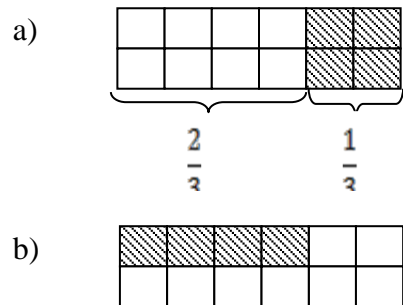
$\frac{1}{4}$ və $\frac{2}{8}$; $\frac{2}{4}$ və $\frac{4}{8}$; $\frac{3}{4}$ və $\frac{6}{8}$; $\frac{1}{2}$ və $\frac{2}{4}$ hissələrinin uzunluqlarını tapın.

Nümunə: 1dm 6sm=16sm

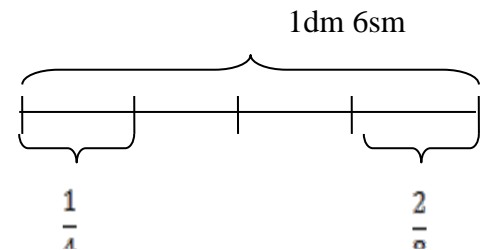
1) $16\text{sm}:4=4\text{sm}$; $16\text{sm}:8=2\text{sm}$; $2\text{sm}\cdot2=4\text{sm}$

4.Hissələri müqayisə edin ($>$, $=$, $<$)

1) $\frac{1}{4}$ və $\frac{1}{8}$; $\frac{2}{8}$ və $\frac{2}{4}$; $\frac{1}{3}$ və $\frac{2}{6}$; $\frac{3}{4}$ və $\frac{4}{8}$



Şəkil 2.



Şəkil 3.

$$2) \frac{6}{6} v\ddot{a}\ddot{a} \frac{3}{3}; \frac{1}{3} v\ddot{a}\ddot{a} \frac{1}{2}; \frac{1}{4} v\ddot{a}\ddot{a} \frac{2}{8}$$

5. 2 dm uzunluqda parçanın $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{5}{10}$ hissələrinin uzunluqlarını sm-lə ifadə edin.

Tam ədədin hissəsini tapmaq qaydasını ifadə edin:

Qayda: tam ədədin bir hissəsini tapmaq üçün həmin ədədi hissələrin sayını göstərən ədədə vurmaq lazımdır: $12 \cdot \frac{1}{2} = 12:2 = 6$

Qayda 2: Tam ədədin bir neçə hissəsini tapmaq üçün həmin ədədi hissələrin sayını göstərən ədəd bölüb, alınan qisməti götürülən hissələrin sayına vurmaq lazımdır:

$$12\text{-nin } \frac{3}{4}\text{-nü tap. } 12:4 \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9$$

6. $\frac{2}{3}$ hissəsi 16sm olan parçanın uzunluğunu tapın.

Həlli. Məchul parçanın $\frac{1}{3}$ hissəsini tapmaq üçün əvvəlcə 1) $16\text{sm}:2=8\text{sm}$. Deməli $\frac{1}{3}$ hissəsi 8 sm olan parça

$$2) 8\text{sm} \cdot 3 = 24 \text{ sm olacaqdır.}$$

Qayda 1. Verilmiş bir hissəsinə görə tam ədədi tapmaq üçün verilən ədədi hissələrin sayını göstərən ədədə vurmaq lazımdır: $\frac{1}{3}$ hissəsi 8sm olan parçanın uzunluğu: $8\text{sm} \cdot 3 = 24 \text{ sm}$ olacaqdır.

Qayda 2. Bir neçə hissəsi verilmiş tam ədədi tapmaq üçün verilən ədədi götürülən hissələrin sayına bölüb, alınan qisməti bütün hissələrin sayına vurmaq lazımdır: $\frac{3}{4}$ hissəsi 21 olan ədədi tapmaq üçün:

7. Parçaları müqayisə edin:

$$1) \frac{1}{5}\text{-i } 10\text{sm və } \frac{1}{5}\text{-i } 9\text{sm};$$

$$2) \frac{2}{5}\text{-i } 8\text{sm və } \frac{3}{5}\text{-ü } 6\text{sm};$$

$$3) \frac{5}{8}\text{-i } 15\text{sm və } \frac{4}{8}\text{-ü } 16\text{sm};$$

$$4) 24\text{sm-in } \frac{2}{6} \text{ və } 28\text{sm-in } \frac{2}{7}.$$

8. İki məntəqə arasında məsafənin $\frac{1}{6}$ hissəsi 6 km 500m-dir. Həmin məsafəni tapın.

9. İki məntəqə arasındakı məsafə 320 km-dir. Bu yolun $\frac{3}{4}$ hissəsi asfalt yoldur. Asfalt yolun uzunluğunu tapın.

10. İki məntəqə arasındakı məsafə 320 km-dir. Bu yolun $\frac{3}{4}$ hissəsi 30 km-dir. Məntəqlər arasındakı məsafəni tapın.

ƏDƏBİYYAT

1. Həmidov S.S. Riyaziyyatın tədrisi metodikası (I-IV siniflər), Bakı, 2012, 335 s.
2. Həmidov S.S. Məktəbin ibtidai siniflərində məsələ həllinin təlim metodikası. Bakı, 2003, 151 s.
3. Бантова М.А. и др. Методика обучения математики в начальных классах, Москва, Просвещение, 1973
4. Həmidov S.S., Məcidova A.Ə. Məktəbin ibtidai siniflərində riyaziyyatın tədrisi metodikası. Bakı, 2016, 278 s.
5. Həmidov S.S., Hacıyev N.M. Məktəbin ibtidai siniflərində məsələ həlli təliminin nəzəri və metodiki problemləri, Bakı, 2008, 180 s.

РЕЗЮМЕ

Ф.Гаджиева

Развитие математической речи в передаче понятие о дроби

В статье даны упражнения о понятии дроби в связи с развитием математической речи.

На занятии дается наглядное сравнение существенного свойства между различными числами клеток прямоугольника. Ученики знакомятся с верными основными свойствами: если скорость дроби умножить или разделить со знаменателем (в отличии от нуля) с одинаковым числом, то значение дроби не изменится.

В статье даны достаточно примеров, что позволяет играть существенное значение в развитии речи.

ABSTARCT

F.Hacıyeva

The developing of the mathematical speech in the given conception about “fraction”

The exercises concerning the developing of the mathematical speech in the given conception about fraction are given in the article. The main properties of the correlation which measures are conveyed by different numbers are given visually on the basis of the number of the squares of the rectangle. Pupils learn the main properties of the (proper) fraction: In the denominator and numerator of the fraction multiplied or divided by the same number the mark of the fraction doesn't change. The samples are given in the article play an important role in the developing of the mathematical speech of pupils.

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə çapa tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

Məqaləni çapa təqdim etdi: *Fizika üzrə fəlsəfə doktoru, dosent A.Abbasov*

RUHİYYƏ CƏFƏROVA
Naxçıvan Dövlət Universiteti

UOT: 372.8:514

**RİYAZİYYATIN MƏKTƏB KURSUNDA HƏNDƏSİ KƏMİYYƏTLƏRİN
ÖLÇÜLMƏSİ**

Açar sözlər: *riyaziyyat, həndəsə, kəmiyyət, kəmiyyətin ölçüsü, ölçü vahidləri*

Keywords: *mathematics, geometry, size, quantity measurement, unit of measure*

Ключевые слова: *математика, геометрия, величина, измерение величины, единица измерения*

Orta məktəbin riyaziyyat kursu - ənənəvi təlim sistemindən fərqli olaraq, vahid proqram əsasında və “riyaziyyat” adlı vahid fənnin tədrisindən ibarət olub, I-XI siniflərin müvafiq riyaziyyat dərslərlərində öz əksini tapır. Riyaziyyatın yeni sistem üzrə tədrisinə keçid davam edir.

Məlumdur ki, riyaziyyatda kəmiyyət anlayışı mühüm anlayış olmaqla, ədəd anlayışı, onun genişləndirilməsi və inkişafı ilə sıx bağlıdır. Ümumiyyətlə, riyazi məsələlərin məzmunu və həlli kəmiyyətlərlə əlqədardır. Riyaziyyat kursunda həndəsi kəmiyyətlər mühüm yer tutur və riyaziyyatın klassik tərifində “riyaziyyat real aləmin fəza formaları və miqdarı münasibətlərdən bəhs edir” – cümləsində həndəsi kəmiyyətlər ön plana çəkilmişdir. Çünki riyazi (miqdarı) münasibətlərin tətbiq obyektləri fəza formaları və ya həndəsi obrazlardır. Bəs “kəmiyyət nədir?” sualı tez-tez işlədilir. Azərbaycan dilində “kəmiyyət” sözü “miqdar”, “qiymət” mənasında işlədilir. Lakin riyaziyyat elmində *kəmiyyət* – real aləmdə mövcud olan obyektlərin və hadisələrin ümumiləşdirilmiş xassəsini ifadə edir. Əşya və ya hadisələrin qiymətləri “böyükdür” (“çoxdur”), “bərabərdir” (“o qədərdir”) və “kiçikdir” (“azdır”) münasibətləri ilə müqayisə və ya ifadə olunur. Bu, o deməkdir ki, hər bir kəmiyyətin qiymətini tapmaq üçün onu ölçmək lazımdır. Kəmiyyəti ölçmək üçün müvafiq ölçü vahidi lazımdır. Kəmiyyətin qiyməti ölçmə nəticəsi ilə müəyyən olunur: ölçülə bilməsi, ölçü vahidinin olması və ölçmə nəticəsində alınan qiymətin ədədlə ifadə olunması. Alınan ədədlərin bu və ya digər kəmiyyətə aid olması – alınan nəticənin yanında ölçü vahidi və ya vahidlərinin qeyd olunması ilə müəyyən edilir. Eyni bir kəmiyyət müxtəlif ölçü vahidləri ilə ölçülə bildiyindən, onun qiymətləri (ədədi) də müxtəlif ola bilər.

Məktəb riyaziyyat kursuna həndəsi kəmiyyətlərin daxil edilməsi təlim məqsədlərindən irəli gəlir:

- şagirdlər qazandıqları riyazi bilik və bacarıqları bilavasitə həyatla əlaqələndirməklə müvafiq vərdişlər qazanırlar və riyaziyyatın həyatda tətbiqlərinin şahidi və iştirakçısı olurlar;
- həndəsi kəmiyyətlərlə tanışlıq həm təhsilin sonrakı mərhələləri üçün hazırlıq və həm də şagirdlərin fəza təsəvvürlərini inkişaf etdirmək kimi məqsədlərə xidmət edir;
- həndəsi kəmiyyətləri öyrənməklə şagirdlər ölçmə nəticələrini hesab əməllərinin tətbiqi ilə hesablamağı öyrənirlər [2;8].

Məktəbdə riyaziyyatın yeni təlim sistemində əsasən hər sinfin riyaziyyat kursunun məzmunu (tədris proqramı) beş “məzmun xəttində” əks olunmuşdur. Bunlardan biri “ölçmələr” məzmun xəttidir ki, “kəmiyyətlərin ölçülməsi” mənasını daşıyır. “Bilavasitə məktəbdə həndəsə materialı tədrisinin məzmununu özündə əks etdirən “Həndəsə” və “Ölçmələr” məzmun xətləri I-XI siniflərin riyaziyyat kurslarına aid olmaqla, bir-birindən məzmunu və proqram tələbləri ilə fərqlənməklə, xüsusi metodika məsələlərini də əks etdirir.

Həndəsi kəmiyyətlərin tədrisi bilavasitə praktik bacarıq və vərdişlər tələb edir. Bu cəhətdən kəmiyyətlərin ölçülməsi mahiyyətini açıqlamağa çalışsaq. Həndəsi kəmiyyətlərin ölçülməsi məsələsi həm nəzəri, həm də metodik cəhətdən mürəkkəb məsələ hesab olunur. Bu çətinlik ilk növbədə

ölçmə obyektlərinin tədris-metodik ədəbiyyatda qeyd olunması ilə izah oluna bilər. Belə ki, uzunluq, sahə, həcm kimi ölçmə obyektlərinin nəzərdən keçirilməsi ilə əlaqədar *kəmiyyətin* bir ümumi anlayış kimi tərfi verilmir [4;200].

Məlumdur ki, sahə - müstəvinin qapalı konturla əhatə olunmuş kəmiyyətlə xarakterizə olunur. Fiqurun sahəsini ölçmək üçün onun xətti ölçü vahidlərini nəzərə almaq lazımdır. Xətti ölçü vahidləri eynidirsə, onda sahəni ölçmək üçün müvafiq sahə ölçü vahidlərindən istifadə etmək lazımdır. Bu halda $a \text{ sm} \cdot b \text{ sm} = ab \text{ kv.sm}$ – kimi əsası olmayan yazılışdan istifadə etmək olmaz. Çünki hər bir kəmiyyətin ölçü vahidlərinin məxsusi funksiyaları var.

Həcmnin bir kəmiyyət kimi ölçülməsi və hesablanması məsələlərinin də özünəməxsus alqoritmi vardır. Çünki *həcm* bir kəmiyyət kimi həndəsi cismin tutduğu *fəza* hissəsi kimi təyin olunur. Bu kəmiyyətin ölçülməsi və qiymətinin hesablanması mərhələlər üzrə aparılır [4;220].

“Düzbucaqlının sahəsi – onun eni ilə uzunluğu hasilinə bərabərdir”, “Düzbucaqlı paralelepipedin həcmi – onun üç ölçüsünün (və ya onun üç ölçüsünü ifadə edən ədədlərin) hasilinə bərabərdir” – ifadələr sxematik olub, kəmiyyətin ölçülməsi və qiymətinin hesablanması mexanizmini açmır. Kəmiyyətlər üzərində əməllərin aksiomatikasında eyni və ya müxtəlif adlı ədədlərin vurulması təyin olunmamışdır. Məsələn, düzbucaqlı paralelepipedin xətti ölçüləri eyni ölçülü ədədlərlə ifadə olunarsa, onda həcmi hesablamaq üçün müvafiq həcm ölçü vahidini seçmək və ölçüləcək həcmi dolduran kub vahidlərinin sayını tapmaq lazımdır. Məsələn, düzbucaqlı paralelepipedin xətti ölçüləri: $a=5\text{sm}$, $b=6\text{sm}$ və $c=8\text{sm}$ olarsa, onda həcm ölçü vahidi 1 kub sm olub, ümumi sayı (həcm) $5 \text{ kub sm} \cdot 6 \cdot 8 = 240 \text{ kub sm}$ olacaqdır.

Burada biz iki işi müəyyən etdik:

- 1) həcm ölçü vahidinin müəyyən edilməsi,
- 2) axtarılan həcmnin qiymətinin və ya həcmi müəyyən edən həcm vahidləri sayının müəyyən edilməsi və alınan nəticənin riyazi yazılışı.

İxtiyari çoxbucaqlının sahəsinin hesablanması – eyni tərkibli fiqurların sahələri və ya müadil (konqruent) fiqurların sahələri – anlayışları *limit* anlayışından istifadə olunmaqla hesablanır. Bu prinsip – ixtiyari çoxüzlülərin həcmələrinin hesablanmasında da tətbiq olunur [4;230]. Kəmiyyətin ədədi qiymətini ifadə edən ədədin necə hesablanması prosesin texniki tərəfini təşkil edir. “Cismin həcmi ifadə edən ədəd” – ifadəsi ümumi xarakter daşıya bilməz. Məhz bu məntiqi qüsür həcm düsturunun çıxarılışında şagirdlərin biliklərində özünü göstərir. Çünki həcm düsturlarının mahiyyətini dərk etməyərək, onları mexaniki əzbərləyirlər. Bu yanaşma məsələlər həllində də tətbiq olunur: hazır düsturlarda verilənləri yazmaqla cavabı hesablamağa çalışırlar. Əslində şagirdlər kəmiyyət anlayışı və kəmiyyətlər üzərində hesab əməllərinin mümkünlük şərtlərini bilmədikləri üçün həndəsi kəmiyyətlərin ölçmə nəzəriyyəsinə dərk edə bilmirlər. Bunu nəzərə alaraq, *həndəsi kəmiyyət* anlayışının məzmununu şərh edək. Təhsil proqramına əsasən, riyaziyyatın məktəb kursunda öyrənilən həndəsi kəmiyyətlər (uzunluq, sahə, həcm) – *additiv skalyar və kəsilməz kəmiyyətlərdir*. Bu kəmiyyətlərin xassələrini nəzərdən keçirək.

I. *Skalyar kəmiyyətlərin* xarakteristikası:

1. Hər hansı a, b, c, \dots obyektlər çoxluğu verilmişdirsə, onda onların ixtiyari ikisi üçün bir-birini inkar edən ancaq üç münasibət mümkündür:

ya $a=b$ (“*a bərabərdir b*”) – bərabərlik münasibəti,
ya $a>b$ (“*a böyükdür b*”)
ya $a<b$ (“*a kiçikdir b*”) } bərabərsizlik münasibəti.

2. Aşağıdakı şərtləri ödəyən bərabərlik münasibətləri:

Simmetriklilik: $a=b$ isə, onda $b=a$;

Refleksivlik: $a=a$

Tranzitivlik: $a=a$, $b=c$ isə, onda $a=c$

3. Tərsi olma və tranzitivlik şərtlərini ödəyən:

bərabərsizlik münasibəti: $a>b$ isə, onda $b<a$;

tranzitivlik münasibəti: $a>b$ və $b>c$ isə, onda $a>c$.

Uzunluq, sahə və həcm skalyar kəmiyyətləri sırasına cismin temperaturu, cismin kütləsi, sıxlığı və s. daxil etmək olar.

II. Additiv kəmiyyətlərin xarakteristikası:

Verilmiş skalyar kəmiyyətlər çoxluğunun iki a və b elementləri üçün həmin çoxluğa daxil olan və bir qiymətli olaraq elə bir c – elementi təyin etmək olar ki, $a+b=c$. Alınan cəm aşağıdakı qanunlara tabe olmalıdır:

1) $a+b=b+a$ (yerdəyişmə)

2) $a+(b+c)=(a+b)+c$ (qruplaşdırma)

3) $a+b=c$ isə, onda $c>a$ və $c>b$ (monotonluq) [4:202].

Parçanın uzunluğu – additiv kəmiyyətə misal ola bilər. Additiv olmayan skalyar kəmiyyətlər vardır. Məsələn, cismin sıxlığı, temperaturu. Həqiqətən, $t_1=30^0$ və $t_2=70^0$ olan iki stəkan suyu qarışdırsaq, qarışığın temperaturu 100^0 olmayacaq. Bu hal sıxlıqları müxtəlif olan maddələrə də aiddir. Yəni alınan yeni sıxlıq verilənlərin cəmindən az olacaqdır.

“Kəmiyyət” anlayışının məktəb təlimi prosesində formalaşdırılması riyaziyyat və fizika fənləri tədrisində diqqət mərkəzində olmalıdır. Çünki cismin hərəkət sürəti həm riyaziyyat və həm də fizika ilə bağlıdır.

Həndəsədə yalnız skalyar additiv kəmiyyətlər nəzərdən keçirilir. Kəmiyyətlərin qiymətlərini müəyyən etmək üçün onları ölçmək lazımdır. Ölçmədə tətbiq olunan vahidlər “əsas” və “törəmə” vahidlərə ayrılır. Beynəlxalq miqyasda qəbul edilmiş ölçü vahidlərinin əsasları müəyyən obyektiv reallıqla bilavasitə əlaqədar olur. Məsələn, uzunluğun əsas ölçü vahidi 1 metr olub, Yer in ekvator çevrəsi uzunluğunun 40 milyonda bir hissəsinə bərabərdir. Vaxtın əsas ölçü vahidləri 1 il və 1 sutkadır. 1 sutka – Yer in öz oxu ətrafında bir tam dövrünə sərf etdiyi vaxt, 1 il isə Yer in Günəş ətrafında bir tam dövrünə sərf etdiyi vaxtdır.

Kəmiyyətin ölçülməsi prosesi aşağıdakı alt proseslərdən və ya fəaliyyətlərdən ibarətdir:

1) verilmiş kəmiyyətlər çoxluğundan hər hansı müəyyən element seçilir və onu *ölçü vahidi* adlandırırlar;

2) ölçmə prosesi həyata keçirilir;

3) verilmiş çoxluğun hər bir elementinə, tətbiq olunan *ölçü* vahidinə uyğun həqiqi ədədin uyğun qoyulması.

Alınan ədəd - kəmiyyətin qiymətini ifadə edir.

Ölçü nəticəsində alınan qiymətlər çoxluğu aşağıdakı iki şərti ödəməlidir:

1) çoxluğun bərabər elementlərinə bərabər qiymətlər uyğun gəlməlidir,

2) iki elementin cəmi onların qiymətləri cəminə uyğun olmalıdır.

Bu iki şərt daxilində iki elementin nisbəti vahid elementin seçilməsindən asılı deyil.

“Kəmiyyətin ölçü vahidi” anlayışı ilə “kəmiyyətin ölçüsü” anlayışlarını fərqləndirmək lazımdır. “Kəmiyyətin ölçüsü” anlayışı – kəmiyyətin ölçü vahidi ilə ifadə olunmuş qiyməti mənasında işlədilir. Məsələn, “parçanın ölçüsü 12dm-dir” və ya “parçanın uzunluğu 12dm-dir”. Hər iki ifadə ekvivalentdir.

ƏDƏBİYYAT

1. Ümumtəhsil məktəblərinin I-IV sinifləri üçün fənn kurikulumları, Bakı, Təhsil, 2008
2. V-XI siniflərin riyaziyyat kurikulumları, Bakı, Pedaqogika, 2012
3. Дидактика средней школы, под редакцией М.Н.Скаткина, М., Просвещение, 1982
4. Методика преподавания геометрии, под редакцией А.И.Фетисова, М., Просвещение, 1963
5. Бутузов В.Ф. и др. Геометрия 7-9 классов, М., Просвещение, 1990

РЕЗЮМЕ

Р.Джафарова

Измерение геометрических величин в курсе математики средней школы

В статье затронуты следующие вопросы:

- роль и значение геометрических величин в школьном курсе математики;
- понятие величины и ее свойства;
- цели включения геометрических величин в школьный курс математики;
- особенности содержательных линий «Геометрия» и «Измерения» в kurikulumе по математике I-XI классов;
- аддитивно-скалярные и непрерывные величины и их характеристики;
- этапы измерения величины;
- основные и производные единицы измерения;
- понятия: измерение величины, значение величины, мера величины;
- единицы измерения и математическое соотношение между ними относительно геометрических величин.

ABSTRACT

R.Jafarova

Measurement of geometric quantities in the course of high school mathematics

The article addressed the following questions:

- The role and importance of geometric quantities in school mathematics;
- The concept of the value and its properties;
- The purpose of incorporating the geometric quantities in school mathematics;
- Particular content lines "Geometry" and "Measurements" in the curriculum of mathematics I-XI classes;
- Additive-scalar and continuous variables and their characteristics;
- Measurement of the stages;
- Basic and derived units;
- Concepts: measurement of the value, the value, the measure of value;
- Units, and mathematical relationship between the relative geometrical quantities

NDU-nun Elmi Şurasının 20 may 2017-ci il tarixli qərarı ilə çapa tövsiyyə olunmuşdur. (Protokol № 09).

Məqaləni çapa təqdim etdi: *Fizika üzrə fəlsəfə doktoru, dosent A.Abbasov*

MÜNDƏRİCAT

RİYAZİYYAT

1. **Sahib Əliyev, Elşad Ağayev** Çəki funksiyasına nəzərən ortonormal çoxhədlilər sisteminin mövcudluq və yeganəlik şərti..... 3
2. **Габиль Ягубов, Вугар Салманов, Вугар Ягубов, Мерве Зенгин.** Разрешимость начально-краевых задач для нелинейного двумерного уравнения Шредингера..... 7
3. **Savanşir Quliyev, Aysel Əliyeva.** Tam şəkildə Qilbarq-serrin tənliyi üçün Dirixle məsələsinin viner mənaada ümumi həllinin varlığı.....22
4. **Абульфаз Мамедов.** О регулярной разрешимости одного класса операторно-дифференциальных уравнений пятого порядка на всей оси..... 26
5. **Rövşən Həsənov.** “Vektor fəzalar” bölməsinin tədrisində riyazi təkliflərin adlandırılması..... 38
6. **Yagub Mammadov, Samira Hasanli.** On the boundedness of dunkl-type maximal function in the generalized dunkl-type morrey spaces..... 43
7. **Ализаде Улви, Сахиб Алиев.** Обратная задача с интегральным условием переопределения для гиперболического уравнения третьего порядка..... 51
8. **Könül Məmmədova.** Cırlaşan parabolik tənliklərin həllərinin aradan qaldırılma bilən çoxluqlarının tədqiqi..... 60
9. **Elman Mahmudov, Ərəstun Həsənov, Nailə Həsən, Tofiq Allahverdiyev.** Qoşma vektor və onun əsas xassələri..... 64
10. **Mirhəsən Tahirov.** Prosiyonun spektrində balmer xətlərinin genişlənmə mexanizmləri.... 68
11. **Ümit Kalemkuş.** Yarımoxda dörd tərtibli operator-diferensial tənliyin requlyar həlli haqqında..... 72

FİZİKA

12. **Məmməd Hüseynəliyev, Mübariz Nuriyev.** Yarımkeçiricilərdə kritik nöqtələrin müxtəlif halları üçün kompleks dielektrik funksiyasının enerjiden asılılıq əyrilərinin müqayisəsi..... 77
13. **Maftun Ismailov, Elshan Mammadov.** On the influence of the material properties on the frequency response of the plate-layer loaded with a compressible viscous fluid..... 82
14. **Qulu Həziyev.** Günəş küləyi və planetlərarası maqnit sahələri..... 90
15. **Xanəli Həsənov.** Qeyri parabolik zonalı yarımkeçiricilərdə elektromaqnit dalğalarının yükdaşıyıcıların qızdırılmasına təsiri..... 93
16. **Шамсадин Казымов, Биллур Гаджиева, Гюлшен Мамедова.** Некоторые особенности структурных превращений в кристаллах халькогенидах серебра..... 96
17. **Seyfəddin Cəfərov. Fərman Qocayev.** Aşqarlanmış laylı A^3B^6 kristalları əsasında heteroqəçidlərdə elektron prosesləri..... 99
18. **Али Бабаев, Сара Ясинова.** Особенности полиморфных превращений в в кристалле $Ag_{0.40}Cu_{1.60}Se$105
19. **Əlövsət Dadaşov.** Komet parametrlərinin fəza paylanması tədqiqi.....112
20. **Ruslan Məmmədov.** Günəş alışımları haqqında.....114

TEXNİKİ ELMLƏR

21. **Asəf Əliyev.** Avtomobilin informasiyalılığını yüksəldən müasir sistemlər.....118
22. **Kəmalə Təhməzbəyova.** Elmi-texnoloji parkların innovativ layihələşdirilməsi istiqamətləri..... 123
23. **Aydın İsayev.** Torpaq yumşaldan işçi orqanın işlənən mühitlə qarşılıqlı əlaqəsinin riyazi modelinin qurulması.....127

METODİKA

24. **Fatma Hacıyeva.** Kəsr haqqında anlayışın verilməsində riyazi nitqin inkişaf etdirilməsi.....133
25. **Cəfərova Ruhıyyə.** Riyaziyyatın məktəb kursunda həndəsi kəmiyyətlərin ölçülməsi.....137